5.3 Integrace racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce je funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P, Q jsou nenulové polynomy.

Při integrování využijeme rozklad této funkce na parciální zlomky, který jsme zavedli v kapitole 2. Uveďme si základní algoritmus rozkladu racionální lomené funkce a vzorce, podle kterých budeme integrovat:

▷ Je-li $R(x)$ neryze lomená funkce, rozložíme ji na součet polynomu a ryze lomené funkce. Pro integraci polynomu použijeme vzorec (1) a (2) z tabulky na str. 88.

▷ Ryze lomenou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky, které jsou dvou typů:

$$a)\ \frac{M}{(x-\alpha)^k}, \quad \text{nebo} \quad b)\ \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

podle toho, zda daný zlomek přísluší reálnému kořenu nebo komplexně sdružené dvojici kořenů polynomu Q.

Případ, kdy zlomek přísluší reálnému kořenu

Je-li číslo α reálný jednoduchý kořen polynomu Q, pak rozklad funkce R má parciální zlomek tvaru

$$\frac{A}{x-\alpha}. \tag{5.6}$$

Pro integraci tohoto zlomku použijeme vzorec (14) a dostaneme

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + c.$$

Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak má rozklad celkem k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-\alpha)^k}.$$

Pro integraci těchto zlomků použijeme (5.6) a pro $k \geq 2$ vzorec (2), podle kterého je

$$\int \frac{M}{(x-\alpha)^k}\,dx = M\int (x-\alpha)^{-k}\,dx = M\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{M}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c.$$

Případ, kdy zlomek přísluší komplexně sdružené dvojici kořenů

Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené jednoduché kořeny polynomu Q, pak má rozklad parciální zlomek tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

kde ax^2+bx+c má kořeny $\alpha \pm i\beta$. Pro integraci tohoto zlomku použijeme vzorců (9) a (14).

Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu Q, pak R má dva parciální zlomky tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

Podobný rozklad dostaneme pro n-násobné ($n \geq 3$) komplexní kořeny. V těchto případech používáme rekurentní vzorec, podrobnosti viz [4] nebo [8].

Příklad 5.16. Vypočítejte následující integrály:

a) $\int \frac{2x^2+6x-2}{x(x+2)(x-1)}\,dx$, b) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)^3}\,dx$,

c) $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}\,dx$, d) $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

Řešení. a) Funkci rozložíme na parciální zlomky a užijeme vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$:

$$\int \frac{2x^2+6x-2}{x(x+2)(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + c.$$

b) Funkci rozložíme na parciální zlomky a zavedeme substituci $t = x-1$. Pak $dx = dt$ a

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(\frac{9}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \int\left(\frac{9}{t^3} - \frac{5}{t^2} + \frac{6}{t}\right)dt =$$
$$= -\frac{9}{2t^2} + \frac{5}{t} + 6\ln|t| + c = -\frac{9}{2(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 6\ln|x-1| + c.$$

c) Funkci rozložíme na parciální zlomky

$$\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx.$$

Oba integrály na pravé straně upravíme následujícím způsobem. Integrované výrazy vynásobíme vhodnou konstantou tak, abychom převedli na zlomek, kde je čitatel roven derivaci jmenovatele

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+1}, \qquad \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+2}$$

a rozdělíme na dva zlomky.

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right),$$
$$\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+2}\,dx\right).$$

Pro první integrály na pravé straně použijeme vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ a pro druhé vzorec (9), tj. $\int \frac{dx}{(x-x_0)^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x-x_0}{a} + c$:

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \mathrm{arctg}\,x,$$
$$\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Dohromady

$$\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

d) Rozložíme funkci na parciální zlomky

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$$

Postupujme obdobně jako v předchozích případech

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1|$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.\end{aligned}$$

Celkem dostáváme

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

▲

Cvičení

1. Vypočtěte:
   - a) $\int 3x^5\,dx$,
   - b) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$,
   - c) $\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5}\,dx$,
   - d) $\int (7x^6 - 5x^4 + 2x - 1)\,dx$,
   - e) $\int (x^4 - x^2\sqrt[5]{x^3})\,dx$,
   - f) $\int (a + 3\cos x)\,dx$,
   - g) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$,
   - h) $\int (7e^x - \frac{5}{x})\,dx$,
   - i) $\int \sin^2 \frac{1}{2}x\,dx$,
   - j) $\int (3\sin^2 x + 3\cos^2 x)\,dx$.

2. Pomocí metody per partes určete primitivní funkce k daným funkcím:
   - a) $\int xe^x\,dx$,
   - b) $\int x\ln x\,dx$,
   - c) $\int x\sin x\,dx$,
   - d) $\int x^2\cos x\,dx$,
   - e) $\int x^3e^x\,dx$,
   - f) $\int x^2\ln x\,dx$,
   - g) $\int \ln x\,dx$,
   - h) $\int \arcsin x\,dx$,
   - i) $\int e^x\cos x\,dx$,
   - j) $\int \sin(\ln x)\,dx$.

$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \quad t = \sqrt{e^x-1} \quad dt = \frac{1}{2}\cdot(e^x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^x\,dx$

3. Vypočtěte:
   - a) $\int \sin 7x\,dx$,
   - b) $\int 3e^{-x}\,dx$,
   - c) $\int 5k\cos\frac{8}{3}x\,dx$,
   - d) $\int 2e^{3x-1}\,dx$,
   - e) $\int (3x-7)^{14}\,dx$,
   - f) $\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$,
   - g) $\int \frac{4}{x-6}\,dx$,
   - h) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$,
   - i) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$,
   - j) $\int \frac{4x^3+1}{x^4+x}\,dx$.

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Pomocí vhodné substituce vypočítejte následující integrály:
   - a) $\int x(x^2-1)^{10}\,dx$,
   - b) $\int 8x^2(x^3+2)^5\,dx$,
   - c) $\int 3x\sqrt[4]{x^2+5}\,dx$,
   - d) $\int \frac{3x}{(x^2+4)^3}\,dx$,
   - e) $\int 5xe^{x^2}\,dx$,
   - f) $\int \frac{7\ln^4 x}{x}\,dx$,
   - g) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$,
   - h) $\int e^{\cos 2x}\cdot\sin x\cos x\,dx$,
   - i) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$,
   - j) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$t = \sqrt{1-x^2}$

$\sqrt{1-x^2} = t$

5. Vypočtěte následující integrály z racionální lomené funkce
   - a) $\int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}\right)dx$
   - b) $\int \left(\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x+2}\right)dx$
   - c) $\int \left(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x-2}\right)dx$,
   - d) $\int \left(\frac{6}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{6x}{x^2+1}\right)dx$,
   - e) $\int \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx$,
   - f) $\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-2x+3}\right)dx$,
   - g) $\int \left(\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1-x}{3(x^2+x+1)}\right)dx$,
   - h) $\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{x-2}{2(x^2+2x+2)}\right)dx$.

Výsledky: Ve všech výsledcích je vynechána integrační konstanta.

1. a) $\frac{x^6}{2}$, b) $-\frac{1}{3x^3}$, c) $-\frac{2}{3x^{\frac{3}{2}}}$, d) $x^7-x^5+x^2-x$, e) $\frac{x^5}{5}-\frac{5}{18}x^{\frac{18}{5}}$, f) $ax+3\sin x$, g) $-x-\operatorname{cotg} x$, h) $7\mathrm{e}^x-5\ln x$, i) $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$, j) $3x$.
2. a) $(x-1)\mathrm{e}^x$, b) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}$, c) $\sin x - x\cos x$, d) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$, e) $(x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x$, f) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{x^3}{9}$, g) $x\ln x - x$, h) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, i) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$, j) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)$.
3. a) $-\frac{1}{7}\cos 7x$, b) $-3\mathrm{e}-x$, c) $\frac{15k}{8}\sin\frac{8x}{3}$, d) $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x-1}$, e) $\frac{(3x-7)^{15}}{45}$, f) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x$, g) $4\ln|x-6|$, h) $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$, i) $\ln|\sin x|$, j) $\ln|x^4+x|$.
4. a) $\frac{1}{22}(x^2-1)^{11}$, b) $\frac{4}{9}(x^3+2)^6$, c) $\frac{6}{5}(x^2+5)^{\frac{5}{4}}$, d) $\frac{-3}{4(x^2+4)^2}$, e) $\frac{5}{2}\mathrm{e}^{x^2}$, f) $\frac{7}{5}\ln^5 x$, g) $\frac{2}{3}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, h) $-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\cos 2x}$, i) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, j) $-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.
5. a) $3\ln|x-1|-2\ln|x+2|$, b) $5\ln|x+3|-2\ln|x+2|$, c) $x-\frac{1}{2x^2}-3\ln|x|+5\ln|x-2|$, d) $6\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}-3\ln(x^2+1)$, e) $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)$, f) $\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}(x-2)}{2}\right)$, g) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)$, h) $\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\ln(x^2+2x+2)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$.

*

Metoda v matematice je trik, který je použit více než jednou.

(1)	$\int 1\,\mathrm{d}x = x + c$,	(8)	$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
(2)	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\quad n \neq -1$,	(9)	$\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c$,
(3)	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + c$,	(10)	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c$,
(4)	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$,	(11)	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln\|x+\sqrt{x^2+a}\| + c$,
(5)	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,\quad a > 0,\ a \neq 1$,	(12)	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$,
(6)	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$,	(13)	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$,
(7)	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$,	(14)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\|f(x)\| + c$.

Kapitola 6

Určitý integrál

Neurčitý integrál přiřazuje funkci množinu funkcí, které se liší o konstantu. Určitý integrál přiřazuje funkci číslo. Jeho definice je založena na požadavku, aby toto číslo vyjadřovalo obsah rovinného obrazce, který je vymezený grafem funkce.

V této kapitole ukážeme vlastnosti určitého integrálu a některé další geometrické aplikace. Na závěr integrálního počtu vysvětlíme pojem nevlastní integrál.

6.1 Definice a základní vlastnosti určitého integrálu

Určitý integrál lze definovat dvěma způsoby; buď pomocí primitivní funkce (*Newtonův integrál*) nebo součtovou definicí (*Riemannův integrál*). Pro spojité funkce jsou obě definice ekvivalentní (tj. stejné), proto použijeme jednodušší přístup – pomocí primitivní funkce.

Definice 6.1. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b]$. *Určitý integrál* funkce f od a do b je číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{6.1}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a,b]$.

Často píšeme místo $F(b)-F(a)$ označení $\left[F(x)\right]_a^b$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b.$$

Poznámka 6.2. i) Připomeňme, že je-li funkce spojitá, pak k ní existuje funkce primitivní (Věta 5.7). Proto je uvedená definice korektní, neboli číslo dané vztahem (6.1) existuje a je určeno jednoznačně. Jednoznačnost ověříme tak, že vezmeme libovolnou primitivní funkci k f; ta je tvaru $F(x)+c$ a podle (6.1) dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

ii) Číslo a nazýváme dolní mez, číslo b horní mez, funkci f integrand.