2.3 Racionální lomené funkce

Příkladem racionální lomené funkce je nepřímá úměra a lineární lomená funkce, které jsou formálně zadány předpisy

$$y = \frac{k}{x}, \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Grafem těchto funkcí je *hyperbola*.

Obě tyto funkce lze zapsat jako podíl dvou polynomů. Obecně dostáváme následující definici.

Definice 2.25. Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální funkce* (též racionální lomená funkce). Tuto funkci dále nazveme *ryze lomenou*, platí-li st$P <$ st$Q$, a *neryze lomenou*, platí-li st$P \geq$ st$Q$.

Příkladem ryze lomené racionální funkce jsou funkce $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+1}{x^5}$; příkladem neryze lomené racionální funkce jsou funkce tvaru $\frac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0$ a $bc - ad \neq 0$, $\frac{x^2+1}{x}$ nebo $\frac{x^2+2}{2x^2-1}$.

Platí následující tvrzení:

i) Definičním oborem racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je množina tvaru

$$D(R) = (-\infty, \infty) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou všechny reálné kořeny polynomu Q.

ii) Je-li $\frac{P(x)}{Q(x)}$ neryze lomená racionální funkce, pak dělením polynomů P a Q obdržíme součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Například,

$$\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1} = x - 2 + \frac{5x+2}{x^2+2x+1}.$$

Znaménko racionální funkce. Stejně jako u polynomů je důležitou úlohou při vyšetřování průběhu funkce úloha určit intervaly, kde je racionální funkce kladná a kde záporná.

Uvažujme racionální funkci, jejíž čitatel a jmenovatel nemají společné kořeny. Buďte $x_1 < \dots < x_p$ všechny navzájem různé **reálné kořeny čitatele a jmenovatele s lichou násobností.** Pak v každém z intervalů $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_p, \infty)$ jsou všechny hodnoty R stále nezáporné nebo nekladné (ve všech bodech, v nichž je R definovaná). V sousedních intervalech se střídají znaménka.

Příklad 2.26. Určete znaménko funkce $R(x)$:

a) $R(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$, b) $R(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-2x+1)(x-2)^2}{(x^2+x-2)^2(x+2)}$.

Řešení. a) Využijme předchozího poznatku a najděme reálné kořeny čitatele a jmenovatele, jimiž jsou čísla $-5, -2, 2, 3$ a 5. Zvolme libovolné číslo z libovolného intervalu vymezeného těmito kořeny a určeme znaménko v něm, např. pro $0 \in (-2, 2)$ platí $R(0) < 0$. Proto funkce $R(x)$ je na tomto intervalu záporná, v dalších intervalech se znaménko pravidelně střídá. Toto pozorování lze shrnout do následující tabulky:

x	$(-\infty,-5)$	$(-5,-2)$	$(-2,2)$	$(2,3)$	$(3,5)$	$(5,\infty)$
$R(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

b) Čitatel i jmenovatel jsou jen částečně rozloženy, musíme proto rozklad dokončit. Dostaneme

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \qquad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, \qquad x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2).$$

Celkově po rozložení má funkce tvar

$$R(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)^2(x+2)^2(x+2)} = \frac{(x-1)^3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^2(x+2)^3}$$

a po vykrácení

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)^2}{(x+2)^3}.$$

Postupujeme obdobně jako v předchozím případě. Reálné kořeny s lichou násobností jsou čísla $-2, -1$ a 1. Vypočteme např. $R(0) < 0$. V sousedních intervalech se znaménka střídají:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$R(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

▲

Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky. Tato úloha je důležitá při integraci racionálních lomených funkcí (kapitola 5).

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je ryze lomená racionální funkce. Každou takovou funkci lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

a) Je-li číslo α reálný jednoduchý kořen polynomu Q, pak rozklad funkce R obsahuje parciální zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)}.$$

b) Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{M}{(x-\alpha)^k}.$$

c) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené jednoduché kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomek tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

d) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu Q, pak R obsahuje součet dvou parciálních zlomků tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

Podobně trojnásobné dvojici komplexních kořenů odpovídá součet tří parciálních zlomků atd.

Celkově je rozklad funkce R součtem všech parciálních zlomků výše uvedného tvaru příslušných všem reálným kořenům a všem dvojicím komplexně sdružených kořenů polynomu Q.

Konstanty v parciálních zlomcích (lze ukázat, že jsou určeny jednoznačně) nalezneme metodou neurčitých koeficientů, tj. napíšeme formální tvar rozkladu a celou rovnost vynásobíme polynomem Q.

Dostaneme tak rovnost dvou polynomů pro všechna x kromě kořenů jmenovatele. Tyto polynomy jsou tudíž identické, tj. mají stejné koeficienty, které určíme pomocí dvou možných způsobů:

1. porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin,
2. dosazením konkrétních hodnot x (vhodné jsou zvláště kořeny jmenovatele Q).

Získáme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých konstant, kterou vyřešíme.

Postup rozkladu racionální funkce na parciální zlomky si ukážeme na příkladech.

Příklad 2.27. Rozložte racionální funkci na parciální zlomky:

a) $R(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x-15}$, b) $R(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,

c) $R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$, d) $R(x) = \frac{x^4+2x^3-10x^2+22x-71}{x^2+2x-15}$,

e) $R(x) = \frac{x^2+4x}{x^4-16}$, f) $R(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)(x^3+x)}$.

Řešení. a) Nejprve rozložíme kvadratický trojčlen ve jmenovateli

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3).$$

Formální tvar parciálních zlomků bude

$$\frac{3x+1}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}.$$

Potřebujeme určit koeficienty A, B. Po vynásobení rovnosti jmenovatelem dostáváme

$$3x+1 = A(x+3)+B(x-5) = (A+B)x+3A-5B.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^1 &: 3 = A + B \\ x^0 &: 1 = 3A - 5B \end{aligned}$$

která má řešení $A = 2$, $B = 1$. Proto rozklad funkce je

$$R(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x-15} = \frac{2}{x-5} + \frac{1}{x+3}.$$

b) Rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

odkud

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Ukažme si druhý způsob určení koeficientů A, B, C, který spočívá ve využití faktu, že daná rovnost musí platit pro všechny hodnoty x. Postupným dosazením různých hodnot proměnné x do předchozí rovnosti dostaneme soustavu rovnic pro koeficienty A, B, C. Volme například $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Dostaneme

$$5 = 2A, \qquad 10 = -B, \qquad 17 = 2C,$$

hledané koeficienty jsou $A = \frac{5}{2}$, $B = -10$, $C = \frac{17}{2}$ a rozklad

$$R(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{10}{x-2} + \frac{17}{2(x-3)}.$$

c) Hledaný rozklad bude tvaru

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1},$$

po vynásobení společným jmenovatelem

$$1 = Ax^2(x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)+Dx^3.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A \quad + D \\ x^2 &: 0 = A + B \\ x^1 &: 0 = B + C \\ x^0 &: 1 = C \end{aligned}$$

která má řešení $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$. Výsledný rozklad je

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}.$$

d) Daná funkce není ryze lomená, proto vydělíme čitatele jmenovatelem

$$(x^4+2x^3-10x^2+22x-71) : (x^2+2x-15) = x^2+5+\frac{12x+4}{x^2+2x-15},$$

a výsledná funkce je součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Tuto ryze lomenou funkci již můžeme rozložit na parciální zlomky

$$R(x) = \frac{x^4+2x^3-10x^2+22x-71}{x^2+2x-15} = x^2+5+\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x+5}.$$

e) Nejprve je třeba rozložit jmenovatele na součin závorek

$$x^4-16 = (x^2)^2-(2^2)^2 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4).$$

Rozklad bude mít formální tvar

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4},$$

tedy

$$x^2+4x = A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4).$$

Roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A + B + C \\ x^2 &: 1 = 2A - 2B \quad + D \\ x^1 &: 4 = 4A + 4B - 4C \\ x^0 &: 0 = 8A - 8B \quad - 4D \end{aligned}$$

jejímž řešením je $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$. Výsledný rozklad je

$$R(x) = \frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{3}{8(x-2)} + \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1-x}{2(x^2+4)}.$$

f) Nejprve upravíme jmenovatele

$$(x^2+1)(x^3+x) = (x^2+1)x(x^2+1) = x(x^2+1)^2.$$

Rozklad bude tvaru

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x^3+x)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Obdobně jako v předchozím příkladu sestavíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme a dostaneme tak řešení

$$R(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)(x^3+x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1-x}{(x^2+1)^2}.$$

▲