

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

Ing. Jana Hřebíčková, RNDr. Jana Slaběňáková,
RNDr. Hana Šafářová

**SBÍRKA PŘÍKLADŮ
Z MATEMATIKY II**

MODUL BA01-M11

NEURČITÝ A URČITÝ INTEGRÁL, DIFERENCIÁLNÍ
POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH,
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU
FORMOU STUDIA

Obsah

1	Neurčitý integrál	5
1.1	Integrace užitím základních vzorců	5
1.2	Integrace substituční metodou	9
1.3	Integrace metodou per partes	12
1.4	Integrace racionálních funkcí	16
1.5	Integrace iracionálních funkcí	19
1.6	Integrace goniometrických funkcí	22
2	Určitý integrál	27
2.1	Výpočet určitého integrálu	27
2.1.1	Výpočet úpravou	27
2.1.2	Výpočet metodou per partes	28
2.1.3	Výpočet substitucí	29
2.2	Aplikace určitého integrálu	32
2.2.1	Obsah rovinného obrazce	32
2.2.2	Objem rotačního tělesa	36
2.2.3	Délka oblouku rovinné křivky	38
2.2.4	Povrch rotačního tělesa	41
2.2.5	Fyzikální aplikace	42
3	Diferenciální počet funkcí více proměnných	47
3.1	Definiční obory funkcí více proměnných	47

3.2	Parciální derivace	48
3.3	Tečná rovina a normála plochy, gradient,	55
3.4	Taylorův polynom	58
3.5	Lokální, vázané a absolutní extrémý	60
3.5.1	Stacionární body	60
3.5.2	Lokální extrémý	60
3.5.3	Vázané extrémý	63
3.5.4	Absolutní extrémý	64
3.5.5	Slovní příklady	65
3.6	Funkce dané implicitně	67
3.7	Parametrizace křivek	72
3.8	Tečna a normálová rovina prostorové křivky	73
4	Diferenciální rovnice	75
4.1	Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	75
4.2	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	78
4.3	Exaktní diferenciální rovnice	79
4.4	LDR s konstantními koeficienty, homogenní	80
4.5	LDR s konstantními koeficienty, nehomogenní	82
4.5.1	Metoda variace konstant	82
4.5.2	Metoda neurčitých koeficientů - speciální pravá strana	84
4.5.3	Různé příklady	86

Kapitola 1

Neurčitý integrál

1.1 Integrace užitím základních vzorců

- $\int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c \right]$
- $\int \left(\frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2} \right) dx$ $\left[\frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + c \right]$
- $\int (10^x - 2^x + 5^{2x}) dx$ $\left[\frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c \right]$
- $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} dx$ $\left[x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c \right]$
- $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$ $\left[-\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + c \right]$
- $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$ $\left[\frac{2x^2}{\sqrt{5}}\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c \right]$
- $\int \frac{a}{b \sin^2 x} dx$ $\left[-\frac{a}{b} \cot x + c \right]$
- $\int \frac{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x} dx$ $\left[\frac{5}{2} \tan x - \frac{3}{2} \cot x + c \right]$
- $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ $\left[\tan x - x + c \right]$
- $\int \frac{3 - 2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx$ $\left[3 \tan x + 2 \cot x + c \right]$
- $\int \cot^2 x dx$ $\left[-\cot x - x + c \right]$

12. $\int \frac{5 \cos^2 x}{3 \sin^2 x} dx$ $\left[-\frac{5}{3} \cot x - \frac{5}{3}x + c \right]$
13. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$ $\left[x + \cos x + c \right]$
14. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ $\left[\tan x - \cot x + c \right]$
15. $\int \frac{\cos^2 x + 1}{1 + \cos 2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \tan x + c \right]$
16. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ $\left[\sin x - \cos x + c \right]$
17. $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$ $\left[x - \sin x + c \right]$
18. $\int \frac{3}{1 + \cos 2x} dx$ $\left[\frac{3}{2} \tan x + c \right]$
19. $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$ $\left[-\cot x - x + c \right]$
20. $\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$ $\left[-\frac{1}{2} \cot x + c \right]$
21. $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$ $\left[a^x \frac{1}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c \right]$
22. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$ $\left[e^x + \tan x + c \right]$
23. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$ $\left[e^x + x + c \right]$
24. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c \right]$
25. $\int \frac{4}{\sqrt{4 - 4x^2}} dx$ $\left[2 \arcsin x + c \right]$
26. $\int \frac{3 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ $\left[3 \arcsin x - x + c \right]$
27. $\int \frac{1}{8 + 8x^2} dx$ $\left[\frac{1}{8} \arctan x + c \right]$
28. $\int \frac{3x^4 - 7x^2 + 5}{x^2 + 1} dx$ $\left[x^3 - 10x + 15 \arctan x + c \right]$
29. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$ $\left[x - \arctan x + c \right]$
30. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$ $\left[x - 2 \arctan x + c \right]$
31. $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$ $\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c \right]$

32. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ $\left[-\frac{1}{x} + \arctan x + c \right]$
33. $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}} dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + c \right]$
34. $\int \frac{5}{\sqrt{9x^2-18}} dx$ $\left[\frac{5}{3} \ln |x + \sqrt{x^2-2}| + c \right]$
35. $\int \frac{2\sin^2 x - 3\cos^2 x}{5\cos^2 x} dx$ $\left[\frac{2}{5} \tan x - x + c \right]$
36. $\int \frac{4+e^x\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{x^2+2}} dx$ $\left[e^x + 4 \ln |x + \sqrt{x^2+2}| + c \right]$
37. $\int \frac{3+e^{-x}\sin x}{e^{-x}} dx$ $\left[3e^x - \cos x + c \right]$
38. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$ $\left[\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}} + c = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c \right]$
39. $\int \tan x dx$ $\left[-\ln |\cos x| + c \right]$
40. $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$ $\left[-\ln |\cos x| + \ln |\sin x| + c \right]$
41. $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x+1}} dx$ $\left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c \right]$
42. $\int \frac{x^2+3}{x^2+1} dx$ $\left[x + 2 \arctan x + c \right]$
43. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$ $\left[\cos x - \cot x + c \right]$
44. $\int \frac{2\tan^2 x+5}{3\sin^2 x} dx$ $\left[\frac{2}{3} \tan x - \frac{5}{3} \cot x + c \right]$
45. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ $\left[-\cot x - \tan x + c \right]$
46. $\int \frac{4\cos 2x}{\sin 2x} dx$ $\left[2(\ln |\sin x| + \ln |\cos x|) + c \right]$
47. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$ $\left[\frac{1}{4}(-\cot x - \tan x) + c \right]$
48. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}(\tan x + x) + c \right]$
49. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ $\left[\frac{1}{2}(x + \sin x) + c \right]$
50. $\int \frac{3}{1+\cos 2x} dx$ $\left[\frac{3}{2} \tan x + c \right]$
51. $\int \frac{1+\sin^2 x+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx$ $\left[-\frac{3}{2} \cot x - \frac{x}{2} + c \right]$

52. $\int \frac{4x^2}{2x+1} dx$ $\left[x^2 - x + \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + c \right]$
53. $\int \frac{x^2-3}{1+x^2} dx$ $\left[x - 4 \arctan x + c \right]$
54. $\int \frac{\cos^2 x \sin^2 \frac{x}{2} + 1}{\cos^2 x} dx$ $\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x + \tan x + c \right]$
55. $\int \frac{3-2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx$ $\left[3 \tan x + 2 \cot x + c \right]$
56. $\int \frac{3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 5}{4 \cos^2 x} dx$ $\left[2 \tan x - \frac{5}{4}x + c \right]$
57. $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+4} dx$ $\left[\ln |x^3 - x + 4| + c \right]$
58. $\int \frac{3x^5+4}{x^6+8x+5} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln |x^6 + 8x + 5| + c \right]$
59. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ $\left[\ln | \ln x | + c \right]$
60. $\int \frac{10x^4+6}{x^5+3x-7} dx$ $\left[2 \ln |x^5 + 3x - 7| + c \right]$
61. $\int (e^x + 1)^3 dx$ $\left[\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x + x + c \right]$
62. $\int \frac{x^3+2x^2+x+5}{x^2+1} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \arctan x + c \right]$
63. $\int \frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x} dx$ $\left[-\cos x - \sin x + c \right]$
64. $\int \frac{2 \tan^2 x + 5}{3 \sin^2 x} dx$ $\left[\frac{1}{3}(2 \tan x - 5 \cot x) + c \right]$
65. $\int \frac{6x^3-4x^2+2x-3}{2x-1} dx$ $\left[x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} \ln |2x - 1| + c \right]$
66. $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$ $\left[\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \ln |2x - 1| + c \right]$
67. $\int \frac{2x-1}{x-2} dx$ $\left[2x + 3 \ln |x - 2| + c \right]$
68. $\int \frac{\cos x}{\sin x+1} dx$ $\left[\ln | \sin x + 1 | + c \right]$
69. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ $\left[\ln |e^x + 1| + c \right]$
70. $\int \frac{dx}{(x^2+1) \arctan x}$ $\left[\ln | \arctan x | + c \right]$

1.2 Integrace substituční metodou

1. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ $\left[\tan \frac{x}{2} + c \right]$
2. $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$ $\left[-\cot \frac{x}{2} + c \right]$
3. $\int \frac{1}{1-\cos 4x} dx$ $\left[-\frac{1}{4} \cot 2x + c \right]$
4. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$ $\left[e^x + e^{-x} + c \right]$
5. $\int (4x-3)^4 dx$ $\left[\frac{1}{20}(4x-3)^5 + c \right]$
6. $\int \left(1 - \frac{x}{6}\right)^5 dx$ $\left[-\left(1 - \frac{x}{6}\right)^6 + c \right]$
7. $\int \frac{1}{(2x-7)^5} dx$ $\left[-\frac{1}{8} \frac{1}{(2x-7)^4} + c \right]$
8. $\int \frac{1}{x^2-6x+9} dx$ $\left[-\frac{1}{x-3} + c \right]$
9. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$ $\left[-\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}} + c \right]$
10. $\int \frac{1}{7x-a} dx$ $\left[\frac{1}{7} \ln |7x-a| + c \right]$
11. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx$ $\left[\frac{1}{a} \tan(ax+b) + c \right]$
12. $\int \frac{1}{\sin^2(3x-7)} dx$ $\left[-\frac{1}{3} \cot(3x-7) + c \right]$
13. $\int \frac{5}{\sqrt{2-49x^2}} dx$ $\left[\frac{5}{7} \arcsin \frac{7x}{\sqrt{2}} + c \right]$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} dx$ $\left[\frac{1}{5} \arcsin 5x + c \right]$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2+6x+4}} dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{7}} + c \right]$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ $\left[\arcsin \frac{x-1}{2} + c \right]$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}} dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + c \right]$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}} dx$ $\left[\arcsin(x+1) + c \right]$
19. $\int \frac{3}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ $\left[3 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c \right]$

20. $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2} \arctan 2x + c \right]$
21. $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$ $\left[\frac{1}{6} \arctan \frac{2}{3}x + c \right]$
22. $\int \frac{2}{(x-1)^2+4} dx$ $\left[\arctan \frac{x-1}{2} + c \right]$
23. $\int \frac{4}{\sqrt{(x-3)^2+3}} dx$ $\left[4 \ln \left| (x-3) \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{(x-3)^2+3} \right| + c \right]$
24. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+5}} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2+5}| + c \right]$
25. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3}} dx$ $\left[\ln |x-1 + \sqrt{(x-1)^2+3}| + c \right]$
26. $\int \frac{1}{\sqrt{1+(3-5x)^2}} dx$ $\left[-\frac{1}{5} \ln |3-5x - \sqrt{1+(3-5x)^2}| + c \right]$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ $\left[\ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x+3}| + c \right]$
28. $\int \sin x \cos x dx$ $\left[\frac{1}{2} \sin^2 x + c \right]$
29. $\int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $\left[\frac{1}{2} \tan^2 x + c \right]$
30. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx$ $\left[\frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} + c \right]$
31. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+1}} dx$ $\left[\frac{1}{4} \ln |x^4 + \sqrt{x^8+1}| + c \right]$
32. $\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$ $\left[-\frac{1}{4} \frac{1}{(1+x^2)^2} + c \right]$
33. $\int \sin x \cos^3 x dx$ $\left[-\frac{1}{4} \cos^4 x + c \right]$
34. $\int \frac{1}{x \sqrt[3]{\ln x}} dx$ $\left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} + c \right]$
35. $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$ $\left[\frac{1}{6} \arctan \frac{2}{3}x + c \right]$
36. $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$ $\left[\arctan(x+2) + c \right]$
37. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$ $\left[\frac{5}{3} \sqrt[5]{\sin^3 x} + c \right]$
38. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$ $\left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + c \right]$
39. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$ $\left[-2\sqrt{1+\cos^2 x} + c \right]$

40. $\int \frac{1+\ln(x+1)}{x+1} dx$ $\left[\frac{1}{2}(1 + \ln(x + 1))^2 + c \right]$
41. $\int e^x \cot e^x dx$ $\left[\ln |\sin e^x| + c \right]$
42. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ $\left[\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c \right]$
43. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2}(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}) + c \right]$
44. $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx$ $\left[\frac{1}{6} \arctan \frac{x^3}{2} + c \right]$
45. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$ $\left[\frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + c \right]$
46. $\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx$ $\left[-\frac{1}{3}(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + c \right]$
47. $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$ $\left[\frac{1}{4} \arctan \frac{2x+1}{2} + c \right]$
48. $\int e^{e^x+x} dx$ $\left[e^{e^x} + c \right]$
49. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$ $\left[\frac{4}{21} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3} (3e^x - 4) + c \right]$
50. $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx$ $\left[\frac{1}{6} \sqrt{2 + 4x}(x - 1) + c \right]$
51. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$ $\left[2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{x-2}{2}} + c \right]$
52. $\int \frac{x}{x^4-x^2-2} dx$ $\left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2-2}{x^2+1} \right| + c \right]$
53. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx$ $\left[\ln x + \ln |\ln x| + c \right]$
54. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2 \cos x}} dx$ $\left[-\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + 2 \cos x)^2} + c \right]$
55. $\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$ $\left[-\frac{1}{4(1+x^2)^2} + c \right]$
56. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $\left[2e^{\sqrt{x}} + c \right]$
57. $\int e^{\sin x} \cos x dx$ $\left[e^{\sin x} + c \right]$
58. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ $\left[\frac{1}{3} \ln^3 x + c \right]$
59. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ $\left[\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + c \right]$
60. $\int \frac{\arctan^3 x}{3(1+x^2)} dx$ $\left[\frac{1}{12} \arctan^4 x + c \right]$

1.3 Integrace metodou per partes

1. $\int x e^x dx$ $\left[x e^x - e^x + c \right]$
2. $\int x \sin 2x dx$ $\left[-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \right]$
3. $\int x \cos^2 x dx$ $\left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + c \right]$
4. $\int x^2 \cos x dx$ $\left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c \right]$
5. $\int x^2 e^{-2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{-2x}(-x^2 - x - \frac{1}{2}) + c \right]$
6. $\int x^3 e^{x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + c \right]$
7. $\int x \ln x dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + c \right]$
8. $\int x^2 \ln x dx$ $\left[\frac{1}{9}x^3(3 \ln x - 1) + c \right]$
9. $\int x \arctan x dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + c \right]$
10. $\int \ln x dx$ $\left[x \ln x - x + c \right]$
11. $\int \log_a x dx$ $\left[x \log_a x - \frac{1}{\ln a}x + c \right]$
12. $\int \arctan \sqrt{x} dx$ $\left[x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \right]$
13. $\int x a^x dx$ $\left[\frac{1}{\ln a}x a^x - \frac{1}{\ln^2 a}a^x + c \right]$
14. $\int x^2 \sin x dx$ $\left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \right]$
15. $\int e^x \sin 2x dx$ $\left[\frac{1}{5}e^x(-2 \cos 2x + \sin 2x) + c \right]$
16. $\int x e^{-x} dx$ $\left[-e^{-x}(x + 1) + c \right]$
17. $\int x^2 \sin 2x dx$ $\left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c \right]$
18. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c \right]$
19. $\int x \tan^2 x dx$ $\left[x(\tan x - x) + \frac{1}{2}x^2 + \ln |\cos x| + c \right]$

20. $\int x^3 e^x dx$ $\left[x^3 e^x - 3e^x x^2 + 6xe^x - 6e^x + c \right]$
21. $\int \ln^2 x dx$ $\left[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c \right]$
22. $\int (\arcsin x)^2 dx$ $\left[x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + c \right]$
23. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ $\left[-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + c \right]$
24. $\int \sin^2 x dx$ $\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin x \cos x}{2} + c \right]$
25. $\int \arcsin x dx$ $\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \right]$
26. $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx$ $\left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2} \cos x + c \right]$
27. $\int x^2 e^{-2x} dx$ $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + c \right]$
28. $\int (x^2 - 3x + 2)e^x dx$ $\left[(x^2 - 5x + 7)e^x + c \right]$
29. $\int x^2 \ln(x+1) dx$ $\left[\frac{1}{3}(x^3 + 1) \ln(x+1) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + c \right]$
30. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ $\left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c \right]$
31. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$ $\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9}) + c \right]$
32. $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ $\left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + c \right]$
33. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ $\left[2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + c \right]$
34. $\int \ln(x^2 + 1) dx$ $\left[x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + c \right]$
35. $\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^x} dx$ $\left[-\frac{2}{5e^x}(2 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) + c \right]$
36. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln^2 x + c \right]$
37. $\int e^{\frac{x}{2}} \cos 2x dx$ $\left[\frac{2}{17}e^{\frac{x}{2}}(4 \sin 2x + \cos 2x) + c \right]$
38. $\int e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{x}{3} dx$ $\left[-\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{3}}(\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}) + c \right]$
39. $\int e^x \cos^2 x dx$ $\left[\frac{1}{5}e^x(\sin 2x + \cos^2 x + 2) + c \right]$

40. $\int \sin \ln x \, dx$ $\left[\frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos \ln x) + c \right]$
41. $\int \cos \ln x \, dx$ $\left[\frac{1}{2}x(\cos \ln x + \sin \ln x) + c \right]$
42. $\int x \cos x \, dx$ $\left[x \sin x + \cos x + c \right]$
43. $\int x^2 e^x \, dx$ $\left[e^x(x^2 - 2x + 2) + c \right]$
44. $\int \arctan x \, dx$ $\left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c \right]$
45. $\int \frac{x^2}{(4x^2+5)^2} \, dx$ $\left[-\frac{x}{8(4x^2+5)} + \frac{\sqrt{5}}{80} \arctan \frac{2x}{\sqrt{5}} + c \right]$
46. $\int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx$ $\left[-\frac{1}{x^2} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x - \frac{6}{x} \ln x - \frac{6}{x} + c \right]$
47. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \, dx$ $\left[(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) \arctan x - 2\sqrt{x} + c \right]$
48. $\int x^2 \arctan x \, dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) + c \right]$
49. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ $\left[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c \right]$
50. $\int \frac{1-\ln x}{x^2} \, dx$ $\left[\frac{1}{x} \ln x + c \right]$
51. $\int \arctan \sqrt{2x-1} \, dx$ $\left[x \arctan \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + c \right]$
52. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$ $\left[x \tan x + \ln(\cos x) + c \right]$
53. $\int x(\arctan x)^2 \, dx$ $\left[\frac{x^2+1}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \right]$
54. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} \, dx$ $\left[\tan x \ln(\cos x) + \tan x - x + c \right]$
55. $\int x \ln(x+1) \, dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln(x+1)(x^2-1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c \right]$
56. $\int \arctan \frac{x-1}{x+1} \, dx$ $\left[x \arctan \frac{x-1}{x+1} - \ln \sqrt{1+x^2} + c \right]$
57. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ $\left[x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c \right]$
58. $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$ $\left[\frac{1}{2}(x\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}) + c \right]$

$$59. \int \sqrt{a+x^2} dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{1}{2}a \ln |x + \sqrt{a+x^2}| + c \right]$$

$$60. \int x^2 \arccos x dx = \left[\frac{1}{3}(x^2 \arccos x - \ln \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)) + c \right]$$

Návod:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{4-x^2} & u' = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$2 \int \sqrt{4-x^2} dx = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$$

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}) + c$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a+x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{a+x^2} & u' = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{a+x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{a \pm x^2}{\sqrt{a+x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{a+x^2}{\sqrt{a+x^2}} dx + \int \frac{a}{\sqrt{a+x^2}} dx = \\ &= \sqrt{a+x^2} - \int \sqrt{a+x^2} dx + a \ln |x + \sqrt{a+x^2}| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \int \sqrt{a+x^2} dx = x\sqrt{a+x^2} + a \ln |x + \sqrt{a+x^2}|$$

$$\int \sqrt{a+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a+x^2} + \frac{1}{2}a \ln |x + \sqrt{a+x^2}| + c$$

1.4 Integrace racionálních funkcí

1. $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$ $\left[\frac{1}{5} \ln((x-2)^2 \sqrt{2x+1}) + c \right]$
2. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$ $\left[\ln \frac{x^2}{|x+1|} + \frac{6}{x+1} + c \right]$
3. $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx$ $\left[\frac{3}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + 20 \ln|x-3| - \frac{47}{4} \ln|x-2| + c \right]$
4. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + x + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \arctan x + c \right]$
5. $\int \frac{x^4}{x^3-x^2+x-1} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan x + c \right]$
6. $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} dx$ $\left[\ln|2x-1| - 6 \ln|2x-3| + 5 \ln|2x-5| + c \right]$
7. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} dx$ $\left[4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + c \right]$
8. $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$ $\left[\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c \right]$
9. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$ $\left[\ln(x^2+4) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{3}{2} \sqrt{2} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{2} + c \right]$
10. $\int \frac{5x^2-12}{x^2-6x+13} dx$ $\left[5x + 15 \ln|x^2-6x+13| + \frac{13}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + c \right]$
11. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$ $\left[\frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| + c \right]$
12. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$ $\left[x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + c \right]$
13. $\int \frac{x}{x^3-1} dx$ $\left[\frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \right]$
14. $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + c \right]$
15. $\int \frac{x}{x^4-1} dx$ $\left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + c \right]$
16. $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \arctan \frac{x+1}{2} + c \right]$

17. $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+5} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln |x^2 + 4x + 5| - 7 \arctan(x + 2) + c \right]$
18. $\int \frac{x}{x^2-3x+3} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 3x + 3| + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + c \right]$
19. $\int \frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}+3e^x+3} dx$ $\left[\frac{5}{2} \ln |e^{2x} + 3e^x + 3| - \frac{17}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2e^x+3}{\sqrt{3}} + c \right]$
20. $\int \frac{2 \ln x - 3}{x(\ln^2 x + \ln x + 1)} dx$ $\left[\ln |\ln^2 x + \ln x + 1| - \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \ln x + 1}{\sqrt{3}} + c \right]$
21. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx$ $\left[\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + c \right]$
22. $\int \frac{1}{2x^2+9x-5} dx$ $\left[\frac{1}{11} \ln \left| \frac{2x-1}{x+5} \right| + c \right]$
23. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$ $\left[-\ln |e^x| + 2 \ln |e^x - 1| + c \right]$
24. $\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx$ $\left[-\frac{3}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln |(x-1)(x+1)^2| + c \right]$
25. $\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx$ $\left[\frac{2}{3(3x-1)} + \ln |3x - 1| + c \right]$
26. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$ $\left[-2 \ln |x+2| - \frac{1}{x+2} + 2 \ln |x+4| - \frac{4}{x+4} + c \right]$
27. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} dx$ $\left[\ln(x^2+1) - 2 \arctan x + \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c \right]$
28. $\int \frac{1}{1+x^3} dx$ $\left[\frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln |x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \right]$
29. $\int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)} dx$ $\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + c \right]$
30. $\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln |x^2-2x+3| + c \right]$
31. $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + x + \ln |x^2-1| + \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + \arctan x + c \right]$
32. $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$ $\left[\ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| - \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + c \right]$

33. $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$ $\left[-\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c \right]$
34. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$ $\left[-\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{33}\ln|2x-3| + \frac{3}{11}\ln|3x+1| + c \right]$
35. $\int \frac{2x+2}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$ $\left[-2\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + c \right]$
36. $\int \frac{6x^2-x+1}{x^3-x} dx$ $\left[-\ln|x| + 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + c \right]$
37. $\int \frac{6x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx$ $\left[2\ln(|x+1|(x^2+2x+3)) - 4\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c \right]$
38. $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} dx$ $\left[\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + c \right]$
39. $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{31}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln|x+1| + c \right]$
40. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+4}{x^4+8x^2+16} dx$ $\left[\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{7}{2}\frac{1}{x^2+4} + c \right]$

1.5 Integrace iracionálních funkcí

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ $\left[2(\sqrt{x} - \ln |\sqrt{x} + 1|) + c \right]$
2. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$ $\left[-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}} + c \right]$
3. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ $\left[2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + c \right]$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^3} dx$ $\left[2 \ln |1 + \sqrt{x}| + \frac{4}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + c \right]$
5. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3-7} \sqrt[3]{x^2+12\sqrt{x}}}{x(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})} dx$ $\left[\frac{12}{5}t^5 - 21t^4 + 4t^3 + 30t^2 + 12t + 36 \ln |t-1| + \right.$
 $\left. + 24 \ln |t+1| + c, \text{ kde } t = \sqrt[12]{x} \right]$
6. $\int \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \frac{1}{(x+2)(x-1)} dx$ $\left[\frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + c \right]$
7. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx$ $\left[\ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| - \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + c \right]$
8. $\int \frac{1+\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1} dx$ $\left[-2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2 \ln \left| \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1 \right| + c \right]$
9. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ $\left[6 \left(\frac{t^{16}}{16} - \frac{t^{10}}{5} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + c, \right.$
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[6]{1+x} \right]$
10. $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$ $\left[x - 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + c \right]$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $\left[2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c \right]$
12. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ $\left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c, \text{ kde } t = \sqrt{x+1} \right]$
13. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$ $\left[4\sqrt{x+1} + 4 \ln |\sqrt{x+1} - 1| + x + 1 + c \right]$
14. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$ $\left[2(\sqrt{x+1} - \ln |\sqrt{x+1} + 1|) + c \right]$
15. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$ $\left[\ln |1-t| - \ln |1+t| + 2 \arctan t + c, \right.$
 $\left. \text{kde } t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right]$
16. $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$ $\left[2 \arctan \sqrt{x+1} + c \right]$
17. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$ $\left[\frac{2}{35} \sqrt{x-1} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + c \right]$

18. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)} dx$ $[3\sqrt[3]{x} + 3 \ln |\sqrt[3]{x} - 1| + c]$
19. $\int \frac{1}{(3x+5)\sqrt{(2x+3)(x+2)}} dx$ $[-2 \arctan t + c, \text{ kde } t = \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}]$
20. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$ $[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c]$
21. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$ $[6 \ln |\frac{t}{t+1}| + c, t = \sqrt[6]{x}]$
22. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+4\sqrt{x}} dx$ $[2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln |\sqrt[4]{x} + 1| + c]$
23. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$ $[\frac{1}{2} \ln |t^2 + t + 1| \sqrt{3} + \arctan \frac{2t+1}{3} - \ln |t-1| + c, \text{ kde } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}]$
24. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx$ $[2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t+1| + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x+1}]$
25. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx$ $[\frac{2}{3}t^9 - \frac{3}{4}t^8 + \frac{6}{7}t^7 - t^6 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x+1}]$
26. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$ $[\text{návod: } t = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}, \ln |\frac{1+t}{1-t}| + c]$
27. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx$ $[-\sqrt{2} \arctan \sqrt{2}t + \ln |\frac{t+1}{t-1}| + c, \text{ kde } t = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}]$
28. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})} dx$ $[-3 \ln |t+1| - \frac{3}{2}t^4 - 9 \ln |1-t| - 6t^2 + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x}]$
29. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx$ $[2t^3 + 6t + 3 \ln |\frac{t-1}{t+1}| + c, \text{ kde } t = \sqrt[6]{x}]$
30. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$ $[3(\frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1|) + c, \text{ kde } t = \sqrt[3]{1+x}]$
31. $\int \frac{\sqrt[4]{4x+1}}{1+\sqrt{4x+1}} dx$ $[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t + c, \text{ kde } t = \sqrt[4]{4x+1}]$
32. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx$ $[\frac{1}{2} \ln |\frac{t-1}{t+1}| - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} + c, \text{ kde } t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}]$

33. $\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{3x+2}}$ $\left[\frac{5}{3} \ln |t+1| + \frac{1}{t+1} + \frac{4}{3} \ln |t-2| + c, \right.$
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[3]{3x+2} \right]$
34. $\int \frac{1}{(3x+5)(x+2)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx$ $\left[-2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + c \right]$
35. $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx$ $\left[3t^2 - 6t + 6 \ln |t| + \frac{6}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + c, \right.$
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[6]{x} \right]$
36. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$ $\left[2\sqrt{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + c \right]$
37. $\int \frac{x^2 dx}{3\sqrt[3]{x+2}}$ $\left[\frac{t^8}{8} - \frac{4t^5}{5} + 2t^2 + c, \text{ kde } t = \sqrt[3]{x+2} \right]$
38. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{-\sqrt{x+1}+(x+1)^2} dx$ $\left[2 \ln |t-1| - \ln |t^2+t+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \right.$
 $\left. + c, \text{ kde } t = \sqrt{x+1} \right]$
39. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$ $\left[\frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln |1+t^3| + c, \text{ kde } t = \sqrt[4]{x} \right]$
40. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ $\left[4 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1| \right) + c, \right.$
 $\left. \text{kde } t = \sqrt[4]{x} \right]$

1.6 Integrace goniometrických funkcí

1. $\int \sin x \cos x \, dx$ $\left[\frac{1}{2} \sin^2 x + c \right]$
2. $\int \tan x \, dx$ $\left[-\ln |\cos x| + c \right]$
3. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} \, dx$ $\left[\frac{\sin x - 2}{\cos x} + c \right]$
4. $\int \cos x \sqrt{1 + 4 \sin x} \, dx$ $\left[\frac{1}{6} (1 + 4 \sin x)^{\frac{3}{2}} + c \right]$
5. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} \, dx$ $\left[-\sqrt{1 + 2 \cos x} + c \right]$
6. $\int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} \, dx$ $\left[-\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + c \right]$
7. $\int \cos^3 x \, dx$ $\left[\frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + c \right]$
8. $\int \cos^4 x \, dx$ $\left[\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \right]$
9. $\int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx$ $\left[\text{rozšířit funkcí } \cos x, \text{ subst. } t = \sin x; \right.$
 $\left. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \frac{1}{4(1-\sin x)} - \frac{1}{4(1+\sin x)} + c \right]$
10. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} + c \right]$
11. $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$ $\left[x - \sin x + c \right]$
12. $\int \frac{1}{1-\cos 2x} \, dx$ $\left[-\frac{1}{2} \cot x + c \right]$
13. $\int \frac{\cos^2 x + 1}{1 + \cos 2x} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan x + c \right]$
14. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} \, dx$ $\left[-\cot x - \tan x + c \right]$
15. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x} \, dx$ $\left[\text{nápověda: subst. } t = \tan \frac{x}{2}; \text{ výsledek:} \right.$
 $\left. \ln \frac{(\tan \frac{x}{2} + 1)^2}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} + c, \text{ nebo rozšířit funkcí } \cos x, \right.$
 $\left. \text{subst. } t = \sin x; \text{ výsledek } \ln |1 + \sin x| + c \right]$
16. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} \, dx$ $\left[\text{nápověda: } \cos^4 x \cdot \cos x, \text{ subst. } t = \sin x, \right.$
 $\left. \text{výsledek: } -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \ln |\sin x| + c; \right]$

- nebo: subst. $t = \tan x$, výsledek:
 $-\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sin^2 x}$
17. $\int \frac{1}{\cos x} dx$ [rozšířit $\cos x$, subst. $t = \sin x$, výsledek
 $\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + c$, nebo
subst. $t = \tan \frac{x}{2}$; $\ln \left| \frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}} \right| + c$
18. $\int \frac{1}{\sin x} dx$ [rozšířit $\sin x$, subst. $t = \cos x$, výsledek:
 $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$, nebo
subst. $t = \tan \frac{x}{2}$; $\ln |\tan \frac{x}{2}| + c$
19. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ [$\frac{-2}{1+\tan \frac{x}{2}} + c$]
20. $\int \frac{2+\cos x}{2-\sin x} dx$ [pro substituci: $t = \tan \frac{x}{2}$:
 $\ln |1 + \tan^2 \frac{x}{2}| - \ln |\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} + 1| +$
 $+ \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + c$]
21. $\int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx$ [$\frac{1}{3} \ln |2 + \cos x| + \frac{1}{6} \ln |1 - \cos x| -$
 $-\frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| + c$]
22. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx$ [subst. $t = \sin x$, $\frac{3}{4} \ln \left| \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right| +$
 $+\frac{1}{4(1-\sin x)} - \frac{1}{4(1+\sin x)} + \sin x + c$]
23. $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$ [subst. $t = \tan x$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \sqrt{2} \tan x + c$]
24. $\int \frac{1}{\sin^6 x} dx$ [subst. $t = \tan x$, $-\frac{1}{5 \tan^5 x} - \frac{2}{3 \tan^3 x} -$
 $-\frac{1}{\tan x} + c$]
25. $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$ [subst. $t = \tan x$, $\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$]
26. $\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1} dx$ [$-\frac{1}{2} \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln |\tan \frac{x}{2}| + c$]
27. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ [$\cos x - 2 \arctan(\cos x) + c$]
28. $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2} dx$ [$-\frac{1}{1+\tan x} + c$]

29. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$ $\left[\arctan(\sin^2 x) + c \right]$
30. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$ $\left[\frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln |2 + \cos x| + c \right]$
31. $\int \frac{\cos x \sin 2x}{\sin^2 x(1+\cos^2 x)} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + \arctan(\cos x) + c \right]$
32. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ $\left[\text{subst. } t = \cos x, -\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + c \right]$
33. $\int \cos^6 x \sin^5 x dx$ $\left[-\frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{2}{9} \cos^9 x - \frac{1}{11} \cos^{11} x + c \right]$
34. $\int \cot^3 x dx$ $\left[\text{subst. } t = \sin x, -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln |\sin x| + c \right]$
35. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ $\left[-\frac{1}{\sin x} - \sin x + c \right]$
36. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ $\left[-\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + c \right]$
37. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$ $\left[\frac{\cos^2 x + \sin x + 1}{\cos x} + c \right]$
38. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$ $\left[-\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + c \right]$
39. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ $\left[\text{subst. } t = \sin 2x, -\frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{x}{16} + c \right]$
40. $\int \cos^4 x dx$ $\left[\frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c \right]$
41. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ $\left[\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c \right]$
42. $\int \sin^4 x dx$ $\left[-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \right]$
43. $\int \cos^6 x dx$ $\left[\frac{5}{16}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \right]$
44. $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$ $\left[\text{úpravy pomocí vzorců, } \frac{1}{1024} \sin 8x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{3}{128}x + c \right]$
45. $\int \sin^5 x \cos^5 x dx$ $\left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{4} + \frac{t^{10}}{10} + c, \text{ kde } t = \sin x \right]$
46. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ $\left[\frac{1}{16} \left(x + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 6x}{12} \right) + c \right]$
47. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx$ $\left[\tan x - \frac{2}{\cos x} + c \right]$

48. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$ $\left[\frac{4}{1-\tan \frac{x}{2}} - x + c \right]$
49. $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$ $\left[-\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + c \right]$
50. $\int \cos x \sqrt{1+4\sin x} dx$ $\left[\frac{1}{6} \sqrt{(1+4\sin x)^3} + c \right]$
51. $\int \frac{1}{3\sin x - 4\cos x} dx$ $\left[\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + c \right]$
52. $\int \frac{1}{5-4\sin x + 3\cos x} dx$ $\left[\frac{1}{2-\tan \frac{x}{2}} + c \right]$
53. $\int \frac{1}{\sin 2x - 2\sin x} dx$ $\left[\text{subst. } t = \tan \frac{x}{2}, \frac{1}{8\tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c, \right.$
nebo subst. $t = \cos x$, výsledek:
 $\left. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{\cos x - 1} \right| \right]$
54. $\int \frac{1}{5-3\cos x} dx$ $\left[\frac{1}{2} \arctan(2 \tan \frac{x}{2}) + c \right]$
55. $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$ $\left[\frac{2}{3} \arctan \left(\frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3} \right) + c \right]$
56. $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{5} (3 \tan \frac{x}{2} + 1) \right) + c \right]$
57. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$ $\left[-\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln \left| \tan^2 \frac{x}{2} - 1 - \tan \frac{x}{2} \right| + \right.$
 $\left. + \frac{3}{5} \ln \left| \tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right| + c \right]$
58. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$ $\left[\frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \right]$
59. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$ $\left[\ln \left| \cos x + \sin x \right| + c \text{ nebo} \right.$
subst. $t = \tan x$, $\ln \left| 1 + \tan x \right| -$
 $\left. - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \tan^2 x \right| + c \right]$
60. $\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x} dx$ $\left[\frac{1}{2} (\ln \left| \tan x \right| + \tan x) + c \right]$
61. $\int \sin 2x \cos 6x dx$ $\left[-\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{8} \cos 4x + c \right]$
62. $\int \sin 3x \sin 5x dx$ $\left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \right]$
63. $\int \frac{1}{4} (\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x) dx$ $\left[-\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{24} \cos 6x + c \right]$

64. $\int \frac{1}{\sin^5 x \cos^5 x} dx$ subst. $t = \tan x$, $\left[\frac{1}{4}(\tan^4 x - \cot^4 x) + 2(\tan^2 x - \cot^2 x) + 6 \ln |\tan x| + c \right]$
65. $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$ $\left[\frac{\cos x + \sin x + 1}{\cos x} + c \right]$
66. $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx$ $\left[\frac{1}{\cos x - 1} + c \right]$
67. $\int \tan^2 x \sin^2 x dx$ $\left[\tan x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \right]$
68. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$ $\left[\text{subst. } t = \tan \frac{x}{2}, \ln |2 + \cos x| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c \right]$
69. $\int \frac{1}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx$ $\left[-\frac{1}{2} \left(\cot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \right) + c \right]$
70. $\int \frac{\cos x}{(1 - \cos x)^2} dx$ $\left[\text{subst. } t = \tan \frac{x}{2}, \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \cot^3 \frac{x}{2} + c \right]$

Kapitola 2

Určitý integrál

2.1 Výpočet určitého integrálu

2.1.1 Výpočet úpravou

$$1. \int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \left[\ln \frac{5}{3} \right]$$

$$2. \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx \quad [2]$$

$$3. \int_0^3 |1 - 3x| dx \quad \left[\frac{65}{6} \right]$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} dx \quad [0]$$

$$5. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx \quad \left[2 - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$6. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx \quad [2]$$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+4} dx \quad \left[\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} \right]$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x dx \quad \left[\frac{\pi}{32} \right]$$

9. $\int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{2} + 2\right) dx$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

10. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ $[\ln 2]$

11. $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + 1) dx$ $[0]$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln 2\right]$

13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

14. $\int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 5) dx$ $\left[\frac{14}{3}\right]$

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ $[2]$

2.1.2 Výpočet metodou per partes

16. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ $[\pi]$

17. $\int_{-1}^1 \ln(x+2) dx$ $[3 \ln 3 - 2]$

18. $\int_{-1}^1 \arccos x dx$ $[\pi]$

19. $\int_0^1 \arctan x dx$ $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\right]$

20. $\int_0^1 e^{3x} x dx$ $\left[\frac{2}{9} e^3\right]$

21. $\int_{-4}^4 x^2 \arctan x dx$ $[0]$

22. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$ $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \text{obtížný}\right]$

23. $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$ $\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$
24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ $\left[\frac{\pi}{2} - 1 \right]$
25. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$ $\left[\pi^2 - 4 \right]$
26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$ $\left[\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) \right]$
27. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \tan^2 x \, dx$ $\left[\ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{18}\pi + \frac{\pi^2}{72} \right]$
28. $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$ $\left[2 \ln 2 - \ln e \right]$
29. $\int_1^e x \ln x \, dx$ $\left[\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right]$
30. $\int_1^e \sin(\ln x) \, dx$ $\left[\frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1) \right]$

2.1.3 Výpočet substitucí

31. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ $\left[\frac{\pi a^4}{16} \right]$
32. $\int_1^5 \frac{\ln x}{x} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln^2 5 \right]$
33. $\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}} \, dx$ $\left[100 \ln \frac{7}{6} - 14 \right]$
34. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$ $\left[\pi \right]$
35. $\int_{\ln 4}^{\ln 8} e^x \frac{\sqrt{e^x-3}}{e^x+2} \, dx$ $\left[2(\sqrt{5}-1) + 2\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right]$
36. $\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$ $\left[\frac{2}{5} \right]$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2\sin x} dx$ $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5} (\arctan \sqrt{5} - \arctan \frac{2\sqrt{5}}{5}) \right]$
38. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$ $\left[\frac{2}{15} (8\sqrt{2} - 7) \right]$
39. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln 3 \right]$
40. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ $\left[\frac{1}{3} \right]$
41. $\int_0^1 x \frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ $\left[\frac{10-6\sqrt{3}}{3} \right]$
42. $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+5} dx$ $\left[\arctan 4 - \arctan 2 \right]$
43. $\int_0^{\ln 5} e^x \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$ $\left[4 - \pi \right]$
44. $\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}} dx$ $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$
45. $\int_{-\pi}^0 \frac{3\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$ $\left[0 \right]$
46. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx$ $\left[\frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \right]$
47. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ $\left[\arctan e - \frac{\pi}{4} \right]$
48. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$ $\left[3(e-1) \right]$
49. $\int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} dx$ $\left[2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right]$
50. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx$ $\left[\frac{1}{3} \right]$
51. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ $\left[\frac{1}{3} \right]$

52. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{1}{a^2+x^2} dx$ $\left[\frac{\pi}{12a} \right]$
53. $\int_{-1}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ $\left[\sqrt{3} \right]$
54. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$ $\left[\frac{1}{2}(1 - \ln 2) \right]$
55. $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{1+2x}} dx$ $\left[2 - \ln 2 \right]$
56. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$ $\left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \right]$
57. $\int_0^a (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx$ $\left[a \left(e - \frac{1}{e} \right) \right]$
58. $\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1} dx$ $\left[-\frac{4}{15} \right]$
59. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ $\left[\frac{1}{4}\pi \right]$
60. $\int_1^5 \frac{1}{x^2+x} dx$ $\left[\ln \frac{5}{3} \right]$
61. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$ $\left[\frac{3}{2} \right]$
62. $\int_0^\pi e^x \sin e^x dx$ $\left[\cos 1 - \cos e^\pi \right]$
63. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$ $\left[\frac{\pi}{2} \right]$
64. $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} dx$ $\left[1 + 2\sqrt{3} \right]$
65. $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+4}} dx$ $\left[\frac{8}{27}(2 - \sqrt{2}) \right]$
66. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$ $\left[\frac{4}{3} \right]$

67. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x \, dx$ $\left[\frac{\pi}{64} + \frac{1}{48} \right]$
68. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x^4-1} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} (\ln \frac{\sqrt{5}}{5} + \arctan \frac{1}{2}) \right]$
69. $\int_{-1}^0 x \sqrt[5]{3+x^2} \, dx$ $\left[\frac{5}{12} (3\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[5]{4}) \right]$
70. $\int_0^{\ln 2} \frac{5e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 3e^x + 3} \, dx$ $\left[\frac{5}{2} \ln \frac{13}{7} - \frac{17\sqrt{3}}{4} (\arctan \frac{7}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}) \right]$

2.2 Aplikace určitého integrálu

2.2.1 Obsah rovinného obrazce

Obsah P křivočarého lichoběžníku ohraničeného křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$:

$$P = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Křivka dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$:

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)| \, dt.$$

Příklady: Vypočtete obsah oblasti v rovině vymezené danými křivkami nebo podmínkami

1. $y = \ln x$, $x = 0$, $y = \ln a$, $y = \ln b$, $a, b > 0$, $a < b$ $[b - a]$
2. $y = 4 - x^2$, $y = 0$ $[\frac{32}{3}]$
3. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x = a$, $x = -a$, $a > 0$ $[a^2(e - e^{-1})]$
4. $yx = 1$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ $[\ln 3]$
5. $y = \ln x$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ $[1]$

6. $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$, $x = -1$, $x = 2$ $\left[\frac{101}{12} \right]$
7. $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 1 - x$ $\left[\frac{\pi-2}{4} \right]$
8. $9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$ $\left[12\pi \right]$
9. $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ $\left[\frac{1+e^\pi}{2e^\pi} \right]$
10. $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$ $\left[\frac{343}{3} \right]$
11. $y(1 + x^2) - 1 = 0$, $y = \frac{1}{2}x^2$ $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right]$
12. $y = x^2$, $y^2 = x$ $\left[\frac{1}{3} \right]$
13. $xy = 4$, $x + y = 5$ $\left[\frac{15}{2} - 4 \ln 4 \right]$
14. $y = -x^2 + 4x - 2$, $x - y = 2$ $\left[\frac{9}{2} \right]$
15. $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$ $\left[4 \ln 4 \right]$
16. $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e^2$ $\left[2 - \frac{2}{e} + e^2 \right]$
17. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \ln 2$ $\left[\frac{1}{2} \right]$
18. $y = 2x^3$, $y = \frac{2}{x}$, $x - y - 1 = 0$, $x \geq 0$ $\left[2 \ln 2 + \frac{1}{2} \right]$
19. $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$ $\left[\frac{16}{3} \right]$
20. $y = \ln^2 x$, $y = \ln x$ $\left[3 - e \right]$
21. $y = x^3 + x^2 - 6x$, $-3 \leq x \leq 3$, osa x $\left[\frac{86}{3} \right]$
22. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného
křivkou $y = e^x$, její tečnou v bodě $A = (0, 1)$
a přímkou $x = -1$. $\left[\frac{e-2}{2e} \right]$
23. Vypočítejte plošný obsah části roviny ohraničené
parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech
 $A = (1, 3)$, $B = (4, 0)$ $\left[\frac{9}{4} \right]$

24. $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0, b > 0$ $[\pi ab]$
25. $x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
– jedna větev cykloidy $[3\pi r^2]$
26. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
– asteroida $[\frac{3}{8}a^2\pi]$
27. $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, t \in \langle 0, \sqrt[4]{8} \rangle$ $[\frac{32}{15}\sqrt{2}]$
28. $x = a \sin 2t, y = a \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle, a > 0$ $[\frac{4}{3}a^2]$
29. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ $[\frac{a^2}{48}(12\pi - \pi^3)]$
30. $x = 2(2 \cos t - \cos 2t), y = 2(2 \sin t - \sin 2t), t \in \langle 0, \pi \rangle$ $[12\pi]$
31. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \frac{16}{x}, & x \in \langle 2, 10 \rangle \end{cases}, x = 1, x = 10, y = 0$ $[\frac{15}{4} + 16 \ln 5]$
32. $y = x^2 - 4, y = 0, x = 6, x = 0$ $[\frac{176}{3}]$
33. $y = \arccos x, y = 0, x \in \langle -1, 1 \rangle$ $[\pi]$
34. $y = x^2 - 1, y = 0, x \in \langle -3, 2 \rangle$ $[\frac{28}{3}]$
35. $y = \tan x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}$ $[\ln 2]$
36. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ $[\frac{32}{3}]$
37. $x = 1, x = 3, y = -x, y = x + 2$ $[12]$
38. $y = \arcsin x, x = 0, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $[\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4} + 1) - 1]$
39. $y = 0, x = -3, x = 3, y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ $[\frac{1643}{10}]$
40. $4x^2 - 8x - y + 5 = 0, 2x - y + 1 = 0$ $[\frac{9}{4}]$
41. $y = 0, x = 0, x = \frac{1}{2}, y = xe^{-2x}$ $[\frac{e-2}{4e}]$

42. $x + y - 7 = 0, xy = 6$ $\left[\frac{35}{2} - 6 \ln 6 \right]$
43. $x^2 + y^2 = 16, y^2 = 6x$ $\left[\frac{16}{3}\pi + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right]$
44. $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0, 4y = -3x^2 + 12x + 20$ $\left[\frac{125}{6} \right]$
45. $y = 2x - x^2, x + y = 0$ $\left[\frac{9}{2} \right]$
46. $y \leq x^3, y^2 \geq 4x, 2x - y - 4 \leq 0, y \leq 1$ $\left[\frac{29}{3} \right]$
47. Odvoďte obsah kruhu o poloměru r . $\left[\pi r^2 \right]$
48. Určete plochu $\triangle ABC$, $A[-1, 1], B[3, 4], C[0, 0]$. $\left[\frac{7}{2} \right]$
49. $y = x + 2, y = -2x, x = 0, x = 3$ $\left[\frac{39}{2} \right]$
50. $x^2 + y^2 \leq 6, y \leq -x^2$ $\left[-\frac{4\sqrt{2}}{3} + 6(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3})) \right]$
51. $y^2 = x, y = x - 2$ $\left[\frac{9}{2} \right]$
52. $y = 6 - x - x^2, y = 0$ $\left[\frac{125}{6} \right]$
53. $y = \sin x, y = \cos x, x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ $\left[\sqrt{2} + 1 \right]$
54. $y = x^2, y = \frac{1}{x}, x = 2$ $\left[\frac{7}{3} - \ln 2 \right]$
55. $x = t, y = \frac{2}{1+t^2}, t \in \langle -1, 2 \rangle$ a osou x . $\left[2 \arctan 2 + \frac{\pi}{2} \right]$
56. $x = t, y = e^{-2t}$ a osou $x, t \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\frac{1-e^{-2}}{2} \right]$
57. $y = -x^3 - x^2 + 2x, y = 0$ $\left[\frac{37}{12} \right]$
58. $\sin 2x + 1, y = e^{-x}$ $\left[\frac{\pi}{2} + e^{-\frac{\pi}{2}} \right]$
59. $y = x^2 + 1, y = 2x^2$ $\left[\frac{4}{3} \right]$
60. $y = 4x, y = x^2 + 2x - 3$ $\left[\frac{32}{3} \right]$

2.2.2 Objem rotačního tělesa

Objem tělesa, které vznikne rotací plochy P (omezené křivkami $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$) kolem osy x :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Je-li křivka dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt.$$

Příklady: Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy x .

1. $P : xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$ [12π]
2. $P : y = -x^2 + 1, y = -2x^2 + 2$ [$\frac{16}{5}\pi$]
3. $P : y = x^2 + 2, y = 2x^2 + 1$ [$\frac{24}{5}\pi$]
4. $P : y = 1 - x^2, y = x^2$ [$\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$]
5. $P : y = \arcsin x, y = 0, x = 1$ [$\pi(\frac{\pi^2}{4} - 2)$]
6. $P : y = x^2, y^2 = x$ [$\frac{3}{10}\pi$]
7. $P : y = x, y = e^2, x \geq 0$ [$\frac{2}{3}\pi e^6$]
8. $P : \{(x, y) : x \leq e^2, 1 \leq y \leq \ln x\}$ [πe^2]
9. $P : y - 1 = \sin 2x, y = e^{-x}, x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ [$\pi(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2} + \frac{1}{2e^\pi})$]
10. Určete číslo b tak, aby objem tělesa, které vznikne rotací křivky $x = 2 \cos t, y = b + 2 \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x , byl 40π . [$\pm \sqrt{\frac{7}{3}}$]
11. $P : x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$ [$\frac{3}{4}\pi$]

12. $P : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0$ $\left[5\pi^2 a^3\right]$
13. $P : x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ $\left[\frac{16\pi ab^2}{105}\right]$
14. $P : y^2 = 4 - x, x = 0$, rotace kolem osy y $\left[\frac{512}{15}\pi\right]$
15. $P : y = x + \sin x, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $\left[\pi\left(\frac{8\pi^3}{3} - 3\pi\right)\right]$
16. $P : y = x^3 \sqrt{\arctan x}, x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\frac{\pi^2}{28} - \frac{5\pi}{84} + \frac{\pi}{14} \ln 2\right]$
17. $P : y = \ln x, x \in \langle 1, e \rangle$ $\left[\pi(e - 2)\right]$
18. $P : y = \sqrt{2x - 3}, x \in \langle 2, a \rangle, a > 2$ $\left[\pi(a - 2)(a - 1)\right]$
19. $P : y = \frac{1}{2}(e^x + x^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\frac{\pi}{8}(e^2 + 4 - e^{-2})\right]$
20. Vypočítejte objem kužele vzniklého rotací úsečky AB ,
 $A = [0, 0], B = [v, r]$ kolem osy x . $\left[\frac{1}{3}\pi r^2 v\right]$
21. Vypočítejte objem rotačního elipsoidu vzniklého rotací
elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$ kolem
a) hlavní osy elipsy $\left[\frac{4}{3}\pi ab^2\right]$
b) vedlejší osy elipsy $\left[\frac{4}{3}\pi a^2 b\right]$
22. $P : y = 4ax, y = x$ $\left[\frac{32\pi a^3}{3}\right]$
23. Vypočítejte objem protáhlého (vejčitého) elipsoidu
vzniklého rotací elipsy dané parametrickými rovnicemi:
 $x = 4 \cos t, y = 2 \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ $\left[\frac{64}{3}\pi\right]$
24. $P : y = \ln(2x - 1)$, osa $x, x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$ $\left[\pi\left(\frac{3}{2} \ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1\right)\right]$
25. $P : y = \cos^2 x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ $\left[\frac{3\pi^2}{16}\right]$
26. $P : y = \sqrt{\ln 2x}, x \in \langle 1, 2 \rangle$ $\left[\pi(3 \ln 2 - 1)\right]$
27. $P : \sqrt[3]{y^2} = 1 - x^{\frac{2}{3}},$ osa $x, x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\frac{16\pi}{105}\right]$

28. Vypočítejte objem tělesa (anuloidu) vzniklého rotací kruhu

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad b > 0 \text{ kolem osy } x. \quad \left[2\pi^2 a^2 b\right]$$

29. $P : y = 2x - x^2, y = 0 \quad \left[\frac{16\pi}{15}\right]$

30. $P : x^2 y^2 + y^2 - x^2 = 0, x \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle \quad \left[\pi(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})\right]$

31. $P : 9y^2 = x(3 - x)^2, x \in \langle 0, 3 \rangle \quad \left[\frac{3}{4}\pi\right]$

32. $P : x = 2t - t^2, y = 4t - t^3$ a osou $x \quad \left[\frac{9871}{210}\pi\right]$

33. $P : y = 1 - x^2, y = x^2 + 2, x = -1, x = 1 \quad [10\pi]$

34. $P : y = \sin x, y = \cos x, y = 0, x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \quad \left[\pi(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})\right]$

35. $P : \triangle ABC, A = [-1, 1], B = [3, 4], C = [0, 0] \quad \left[\frac{35}{3}\pi\right]$

36. $P : y = -x^2 - x + 6$ a osa $x \quad \left[\frac{625}{6}\pi\right]$

37. Odvoďte objem kulové plochy o poloměru $r \quad \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$

38. $P : y = \tan x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \quad \left[\pi(1 - \frac{\pi}{4})\right]$

39. $P : y = \frac{1}{x} \vee x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle \quad \left[\frac{3}{2}\pi\right]$

40. $P : y = x^2 + 1 \vee x \in \langle -3, 3 \rangle \quad \left[\frac{696}{5}\pi\right]$

2.2.3 Délka oblouku rovinné křivky

Je-li křivka dána rovnicí $y = f(x), x \in \langle a, b \rangle$, pak:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Je-li křivka dána parametricky $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Příklady:

1. $y = \arcsin e^{-x}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ $[\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})]$
2. $y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ $[e - 1]$
3. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ $[2]$
4. $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ $[\ln 3 - \frac{1}{2}]$
5. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$ $[\ln \frac{e^2 + 1}{e}]$
6. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ $[2 + \frac{1}{2} \ln 3]$
7. $y = \ln \sin x$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$ $[\frac{1}{2} \ln 3]$
8. $y = \frac{(x-3a)\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$, $a > 0$, $x \in \langle 0, 4a \rangle$ $[\frac{14}{3}a]$
9. $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$ $[4]$
10. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$,
 $a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, evolventa $[2a\pi^2]$
11. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$,
 $t \in \langle 0, \pi \rangle$ $[\frac{\pi^3}{3}]$
12. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ $[\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)]$
13. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ $[\frac{3}{2}a]$
14. $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$, mezi průsečíky s osou x $[4\sqrt{3}]$
15. $x = \frac{1}{6}t^6$, $y = 2 - \frac{1}{4}t^4$, mezi průsečíky s osami
souřadnic, $t > 0$ $[\frac{13}{3}]$
16. $y^2 = x^3$ vyřatý přímkou $x = \frac{4}{3}$ $[\frac{112}{27}]$
17. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $a > 0$ v intervalu $\langle -a, a \rangle$ $[a \frac{e^2 - 1}{e}]$
18. $y = \ln x$ v intervalu $\langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$ $[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}]$

19. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ v intervalu $\langle -\frac{4}{9}a, 1 - \frac{4}{9}a \rangle$, $a > 0$ $\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$
20. $y = e^x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\sqrt{e^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$
21. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ $\left[e - \frac{1}{e}\right]$
22. $y = \ln \cos x$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ $\left[\ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right]$
23. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2-x^2}$ v intervalu $\langle 0, b \rangle$, $a, b > 0$ $\left[-b + a \ln \left|\frac{a+b}{a-b}\right|\right]$
24. $y = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2}$, $x \in \langle b, a \rangle$ $\left[a \ln \frac{a}{b}\right]$
25. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))\right]$
26. $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ $\left[\sqrt{2}\right]$
27. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ $\left[3\right]$
28. $x = t$, $y = \ln t$, $t \in \langle 1, e \rangle$ $\left[\sqrt{e^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^2+1}-1}{\sqrt{e^2+1}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$
29. $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2 - 1$ mezi průsečíky s osou x $\left[\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})\right]$
30. $y = t$, $x = \sqrt[3]{t^2} - 1$ mezi průsečíky s přímkou $x = 4$ $\left[\frac{458\sqrt{229}-16}{27}\right]$
31. $y = \ln x$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ $\left[\sqrt{10} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$
32. $y = 2\sqrt{x}$, $x \in \langle 1, 4 \rangle$ $\left[\frac{1}{2}(\ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} + 4\sqrt{5} - \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2})\right]$
33. $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$ $\left[2\pi\right]$
34. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}|)$,
 $x \in \langle 1, a+1 \rangle$, $a > 1$ $\left[\frac{1}{2}(a^2 + 2a)\right]$
35. $x = \frac{1}{6}t^6$, $y = 4 - \frac{1}{4}t^4$ pro $t \in \langle -2, 2 \rangle$ $\left[\frac{1}{3}(17\sqrt{17} - 1)\right]$

2.2.4 Povrch rotačního tělesa

Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x :

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Je-li křivka dána parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Příklady: Vypočtete povrch tělesa, které vznikne rotací křivky (obrazce omezeného křivkami) kolem osy x .

- | | |
|---|---|
| 1. $y^2 = x$, $y = x^3$ | $\left[\frac{\pi}{54} (20\sqrt{10} + 45\sqrt{5} - 11) \right]$ |
| 2. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$,
$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$ | $\left[\frac{64\pi a^2}{3} \right]$ |
| 3. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, $a > 0$ | $\left[\frac{6\pi a^2}{2} \right]$ |
| 4. $y = 4 + x$, $x \in \langle -4, 2 \rangle$, | $\left[36\sqrt{2}\pi \right]$ |
| 5. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ | $\left[\frac{\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 4) \right]$ |
| 6. $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$ | $\left[3\pi \right]$ |
| 7. $x = a \sin 2t$, $y = 2a \sin^2 t$, $a > 0$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ | $\left[4\pi^2 a^2 \right]$ |
| 8. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ | $\left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^\pi - 2) \right]$ |
| 9. $\triangle ABC$, $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(3, 4)$ | $\left[2\pi(5\sqrt{13} + 4) \right]$ |
| 10. povrch anuloidu $(y - b)^2 + x^2 = a^2$, $b > a$ | $\left[4\pi^2 ab \right]$ |
| 11. odvoďte vzorec pro povrch kulové plochy | $\left[4\pi r^2 \right]$ |
| 12. $y^2 = 4 + x$, $x \in \langle -4, 2 \rangle$ | $\left[\frac{62\pi}{3} \right]$ |

13. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$... kulový vrchlík $[\pi]$
14. $y^2 = 4ax$, $a > 0$, $x \in \langle 0, 3a \rangle$ $[\frac{56\pi a^2}{3}]$
15. $y = 3 \sin \frac{x}{2}$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ $[8\pi(\frac{3}{4}\sqrt{13} + \ln(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}))]$
16. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$,
 $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$... evolventa $[3\pi a^2]$
17. $y = e^{-x}$, $x \in \langle -1, 3 \rangle$ $[\pi(e\sqrt{1+e^2} + \ln|e + \sqrt{1+e^2}| + \ln \frac{e+\sqrt{1+e^2}}{e^{-3}+\sqrt{1+e^{-6}}})]$
18. obsah plochy vzniklé otáčením smyčky
 křivky $9ax^2 = y(3a - y)^2$ kolem osy y , $a > 0$ $[3\pi a^2]$
19. $y = \frac{x^3}{3}$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$ $[\frac{\pi}{9}(17\sqrt{17} - 1)]$
20. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $[\text{návod: jedná se o asteroidu, meze pro } x \in \langle -a, a \rangle, S = \frac{12}{5}\pi a^2]$

2.2.5 Fyzikální aplikace

Příklady:

A. Najděte souřadnice těžiště T homogenní hmotné oblasti omezené křivkami:

1. $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$ $T[0, \frac{24+15\pi}{30\pi-20}]$
2. $y^2 = 6x$, $x - 5 = 0$ $T[3, 0]$
3. $y^2 = x^3$, $x = 1$ $T[\frac{5}{7}, 0]$
4. $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ $T[\frac{49}{3\pi}, \frac{4(a+b)}{3\pi}]$
5. $y = 0$, $y = \cos x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ $T[0, \frac{\pi}{8}]$

$$6. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad a > 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad \left[S_x = S_y, \quad S_y = \frac{a^3}{30}k, \quad m = \frac{a^2}{6}k, \right. \\ \left. T\left[\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right] \right]$$

$$7. x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6 \quad T[2, 2]$$

$$8. x + y = a, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \left[S_x = \frac{a^3}{6}k, \quad S_y = \frac{a^3}{6}k, \quad m = \frac{a^2}{2}k \right]$$

Zkontrolujte výsledek pro $a = 6$.

$$9. y = 0, \quad y = 4 - x^2 \quad T\left[0, \frac{8}{5}\right]$$

$$10. \text{Najděte těžiště jedné čtvrtiny plochy elipsy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \\ \left[S_x = \frac{ka^2b}{3}, \quad S_y = \frac{ka^3}{3}, \quad m = \frac{k\pi a^2}{4}, \quad T\left[\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right] \right]$$

$$11. \text{Najděte } S_x, S_y, m \text{ pro } y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1 \quad \left[S_y = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}, \quad m = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}, \right. \\ \left. S_x = \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8} \right]$$

$$12. y = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \quad y = 0 \quad T\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]$$

$$13. y = x^2, \quad y = x^2 + 2, \quad x = 0, \quad x = 4 \quad \left[m = 8k, \quad S_x = 136k, \quad S_y = \right. \\ \left. 16k, \quad T[2, 17] \right]$$

$$14. y = 3 - 2x^2 \text{ a osa } x \quad T\left[0, \frac{4}{5}\right]$$

$$15. y = 2x - x^2, \quad y = 0 \quad T\left[1, \frac{2}{5}\right]$$

$$16. y = \cos x, \quad y = x^2 - \frac{\pi^2}{4} \quad T\left[0, \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^5}{60}}{2(1 + \frac{\pi^3}{12})}\right]$$

$$17. x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \quad T\left[\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi}\right]$$

$$18. x = t^2 - t, \quad y = t^3 + t^2, \quad y = 0 \quad T\left[\frac{83}{77}, \frac{9}{154}\right]$$

$$19. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad T\left[a\pi, \frac{5a}{6}\right]$$

B. Najděte souřadnice těžiště T nehomogenní hmotné oblasti omezené křivkami:

$$20. \text{parabolou } y = -ax^2 + b, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ a osou } x \quad T\left[0, \frac{2}{5}b\right]$$

21. $x^2 + y^2 = 4$ a osou x $\left[m = 2\pi, S_x = \frac{16}{3}, y_T = \frac{8}{3}\pi \right]$
22. Najděte těžiště oblasti ohraničené půlkou kružnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, kde hustota je přímo úměrná parametru t ($\sigma(t) = kt$).
 $\left[m = \frac{\pi^2 kr}{2}, S_x = \pi kr, S_y = -2kr^2, T \left[-\frac{4r}{\pi^2}, \frac{2r}{\pi} \right] \right]$
23. $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, kde hustota je rovna x -ové souřadnici bodu.
 $\left[m = \pi, S_x = \frac{\pi^2}{8}, S_y = \pi^2 - \frac{4}{\pi}, T \left[\frac{\pi^3 - 4}{\pi^2}, \frac{\pi}{8} \right] \right]$
24. $y = e^x$, $y = 0$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\sigma(x) = \sin x$,
 pouze y_T $\left[y_T = \frac{e^{2\pi} + 1}{5e^\pi} \right]$
25. $y = \frac{x^2}{4} + 2$, $y = \frac{x^2}{4}$, $x = 1$, $x = 4$, jestliže hustota je v každém bodě úměrná souřadnici x .
 $T \left[\frac{42}{15}, \frac{375}{120} \right]$
26. $y^2 = 12x$, $y \geq 0$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$
 $\left[m = \frac{2}{3} 2\sqrt{3}(2\sqrt{2} - 1), S_x = 9, S_y = \frac{2}{5} 2\sqrt{3}(4\sqrt{2} - 1), T \left[\frac{3}{5} \frac{4\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1}, \frac{27}{4\sqrt{3}(2\sqrt{2} - 1)} \right] \right]$
- C. Najděte souřadnice těžiště T daných hmotných oblouků:
27. homogenní polokružnice $x^2 + y^2 = r^2$ $T \left[0, \frac{2r}{\pi} \right]$
28. čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = r^2$ v 1. kvadrantu, je-li hustota v každém bodě úměrná součinu souřadnic příslušného bodu [$\sigma = kxy = kx\sqrt{r^2 - x^2}$] $T \left[\frac{2}{3}r, \frac{2}{3}r \right]$
29. $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$, homogenní $T \left[\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$
30. křivky $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, hustota je v bodě přímo úměrná x -ové souřadnici bodu $T \left[\frac{\pi a}{8}, \frac{15\pi a}{256} \right]$
31. půlkružnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, kde hustota je úměrná parametru [$\sigma(t) = kt$]. $T \left[-\frac{4r}{\pi^2}, \frac{2r}{\pi} \right]$
32. homogenní $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ $T \left[0, \frac{2a}{5} \right]$
33. homogenní, 1 oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $T \left[\pi a, \frac{4a}{3} \right]$

34. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$, homogenní

$$\left[m = \frac{k}{2} \left(\frac{3}{2} + \ln 2 \right), S_x = \frac{k}{8} \left(\frac{27}{4} - \ln 2 (\ln 2 + 4) \right), S_y = \frac{5}{3} k, T[1, 520; 0, 397] \right]$$

35. $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x \in \langle 0, a \rangle$

$$T \left[\frac{2a}{e+1}, \frac{a(e^4+4e^2-1)}{4e(e^2-1)} \right]$$

Kapitola 3

Diferenciální počet funkcí více proměnných

3.1 Definiční obory funkcí více proměnných

Zapište a zakreslete definiční obory funkcí.

Výsledné obrázky k daným příkladům jsou v příloze.

1. $z = x^3y + y^2x$ $[\mathbf{R} \times \mathbf{R}]$
2. $z = \frac{1}{x} + y$ $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - \{x = 0\}]$
3. $z = \frac{1}{x+y}$ $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - \{y = -x\}]$
4. $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - [0, 0]]$
5. $z = \frac{4xy}{4-x^2-y^2}$ $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - \{x^2 + y^2 = 4\}]$
6. $z = \ln(xy)$ $[x > 0 \wedge y > 0, y < 0 \wedge x < 0]$
7. $z = \sin x + \sqrt{\sin y}$ $[y \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle]$
8. $z = \ln(x^2 + y^2)$ $[\mathbf{R} \times \mathbf{R} - [0, 0]]$
9. $z = \ln \frac{1}{xy}$ $[x > 0 \wedge y > 0, y < 0 \wedge x < 0]$

10. $z = \arctan \sqrt{x+y}$ $[y \geq -x]$
11. $z = \arcsin(x-y)$ $[(x-y) \in \langle -1, 1 \rangle]$
12. $z = \arcsin \frac{x}{y}$ $[\frac{x}{y} \in \langle -1, 1 \rangle \wedge y \neq 0]$
13. $z = \ln(\ln xy)$ $[\ln xy > 0 \wedge xy > 0]$
14. $z = \cot(x+y)$ $[y \neq -x + k\pi]$
15. $z = \ln \sin(x+y)$ $[\sin(x+y) > 0]$
16. $z = \frac{\ln(xy^2)}{x-y}$ $[x \neq 0, y \neq 0, y \neq x, x > 0]$
17. $z = 5x - \ln(x + \ln y)$ $[y > e^{-x}]$
18. $z = \frac{1}{x^2-y} \ln(y-x^2)$ $[y > x^2]$
19. $z = \ln(x \ln(y-x))$ $[y > x \wedge x \ln(y-x) > 0]$
20. $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ $[\frac{x+y}{x-y} \geq 0 \wedge x \neq y]$
21. $z = \sqrt{\sin x \sin y}$ $[\sin x \sin y \geq 0]$
22. $z = \tan(x-y)$ $[y \neq x + (2k+1)\frac{\pi}{2}]$
23. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ $[-1 \leq (x^2 + y) \leq 1]$
24. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ $[-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \wedge x \neq 0]$
25. $z = \sqrt{\sin(\pi(x^2 + y^2))}$ $[\sin(\pi(x^2 + y^2)) \geq 0]$

3.2 Parciální derivace

Příklady: Vypočtete parciální derivace prvního řádu funkcí dvou proměnných.

$$1. z = |x|y^2 \quad \left[z'_x = \begin{cases} -y^2 & x < 0 \\ y^2 & x > 0, \end{cases} \quad z'_y = 2y|x| \right]$$

2. $z = e^x(x - y)$ $\left[z'_x = e^x(x - y + 1), z'_y = -e^x \right]$
3. $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ $\left[z'_x = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, z'_y = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right]$
4. $z = e^{xy} \ln(x + y)$ $\left[z'_x = e^{xy}(y \ln(x + y) + \frac{1}{x + y}), z'_y = e^{xy}(x \ln(x + y) + \frac{1}{x + y}) \right]$
5. $z = e^{\frac{x}{y}}$ $\left[z'_x = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, z'_y = -\frac{x e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \right]$
6. $z = \sqrt{x} \arctan \sqrt{y}$ $\left[z'_x = \frac{\arctan \sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, z'_y = \frac{\sqrt{x}}{2(1 + y)\sqrt{y}} \right]$
7. $z = \arcsin \frac{x}{x + y}$ $\left[z'_x = \sqrt{\frac{y}{2x + y}} \frac{1}{x + y}, x + y > 0, \right.$
 $\left. z'_y = -\frac{x}{\sqrt{y(2x + y)(x + y)}}, x + y > 0 \right]$
8. $z = \ln(x \ln(x - y))$ $\left[z'_x = \frac{1}{x \ln(x - y)} (\ln(x - y) + \frac{x}{x - y}), \right.$
 $\left. z'_y = \frac{1}{(y - x) \ln(x - y)} \right]$
9. $z = \tan^2 \frac{x}{y}$ $\left[z'_x = \frac{2 \tan \frac{x}{y}}{y \cos^2 \frac{x}{y}}, z'_y = -\frac{2x \tan \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \right]$
10. $z = \arctan x^{\frac{y}{2}}$ $\left[z'_x = \frac{yx^{\frac{y}{2}-2}}{2(1 + x^y)}, z'_y = \frac{x^{\frac{y}{2}} \ln x}{2(1 + x^y)} \right]$
11. $z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$ $\left[z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$
12. $z = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x + y}$ $\left[z'_x = 2x \sin \frac{1}{x + y} - \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)^2} \cos \frac{1}{x + y}, \right.$
 $\left. z'_y = 2y \sin \frac{1}{x + y} - \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)^2} \cos \frac{1}{x + y} \right]$
13. $z = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{y}}}$ $\left[z'_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x - \sqrt{y}})^2}, z'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x - \sqrt{y}})^2} \right]$
14. $z = e^{xy}xy$ $\left[z'_x = e^{xy}y(xy + 1), z'_y = e^{xy}x(xy + 1) \right]$
15. $z = 3^{x \ln y}$ $\left[z'_x = 3^{x \ln y} \ln 3 \ln y, z'_y = \frac{x}{y} 3^{x \ln y} \ln 3 \right]$
16. $z = \sin(x^{\cos y})$ $\left[z'_x = \cos(x^{\cos y}) \cos y \cdot x^{\cos y - 1}, \right.$
 $\left. z'_y = -\ln x \cos(x^{\cos y}) x^{\cos y} \sin y \right]$
17. $z = \sin^y x$ $\left[z'_x = y \sin^{y-1} x \cos x, z'_y = \sin^y x \ln \sin x \right]$

18. $z = (4xy^2 - xy)^3$ $\left[z'_x = 3(4xy^2 - xy)^2(4y^2 - y), \right.$
 $\left. z'_y = 3(4xy^2 - xy)^2(8xy - x) \right]$
19. $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $\left[z'_x = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, z'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right]$
20. $z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ $\left[z'_x = \frac{y}{\sqrt{2y(x+y)}\sqrt{x-y}}, z'_y = \frac{-x}{\sqrt{2y(x-y)}(x+y)} \right]$
21. $z = \arctan \sqrt{1+xy}$ $\left[z'_x = \frac{y}{(2+xy)2\sqrt{1+xy}}, z'_y = \frac{x}{(2+xy)2\sqrt{1+xy}} \right]$
22. $z = \frac{1}{xy}$ $\left[z'_x = -\frac{1}{yx^2}, z'_y = -\frac{1}{xy^2} \right]$
23. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[z'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{y}{x^2+y^2} \right]$
24. $z = \frac{3xy}{x-y}$ $\left[z'_x = -\frac{3y^2}{(x-y)^2}, z'_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2} \right]$
25. $z = (\sin x)^{\cos y}$ $\left[z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}, \right.$
 $\left. z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y} \right]$
26. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ $\left[z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}} \right]$
27. $z = xy e^{\sin \pi xy}$ $\left[z'_x = e^{\sin \pi xy} y (1 + \pi xy \cos \pi xy), \right.$
 $\left. z'_y = e^{\sin \pi xy} x (1 + \pi xy \cos \pi xy) \right]$
28. $z = x e^{\frac{y}{x}}$ $\left[z'_x = e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right), z'_y = e^{\frac{y}{x}} \right]$
29. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy}$ $\left[z'_x = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}, z'_y = -\frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}} \right]$
30. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ $\left[z'_x = -\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}, z'_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2} \right]$
31. $z = \frac{1}{\arctan \frac{y}{x}}$ $\left[z'_x = \frac{y}{(x^2+y^2)(\arctan \frac{y}{x})^2}, z'_y = \frac{-x}{(x^2+y^2)(\arctan \frac{y}{x})^2} \right]$
32. $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\left[z'_x = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, z'_y = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \right]$
33. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ $\left[z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \right]$
34. $z = \ln \frac{x-y}{x+y}$ $\left[z'_x = \frac{2y}{x^2-y^2}, z'_y = -\frac{2x}{x^2-y^2} \right]$

35. $f(t, r) = \frac{1}{\sin^2 \pi t + \sin^2 \pi r}$ $\left[f'_t = -\frac{\pi \sin 2\pi t}{(\sin^2 \pi t + \sin^2 \pi r)^2}, f'_r = -\frac{\pi \sin 2\pi r}{(\sin^2 \pi t + \sin^2 \pi r)^2} \right]$
36. $f(t, r) = \sqrt{tr^2 - 1}$ $\left[f'_t = \frac{r^2}{2\sqrt{tr^2 - 1}}, f'_r = \frac{tr}{\sqrt{tr^2 - 1}} \right]$
37. $f(t, r) = \sqrt{3r^2 - 2t^3}$ $\left[f'_t = -\frac{3t}{\sqrt{3r^2 - 2t^3}}, f'_r = \frac{3r}{\sqrt{3r^2 - 2t^3}} \right]$
38. $f(t, r) = \ln t^r$ $\left[f'_t = \frac{r}{t}, f'_r = \ln t \right]$
39. $f(t, r) = \frac{t-r}{t+r^2}$ $\left[f'_t = \frac{r^2+r}{(t+r^2)^2}, f'_r = \frac{r^2-t-2rt}{(t+r^2)^2} \right]$
40. $f(t, r) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{r}}$ $\left[f'_t = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{r}} \ln 3, f'_r = \frac{t}{r^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{r}} \ln 3 \right]$

Příklady: Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkcí tří proměnných.

1. $u = f(x, y, z) = xy^z$ $\left[u'_x = y^z, u'_y = xzy^{z-1}, u'_z = xy^z \ln y \right]$
2. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$ $\left[u'_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)^3}}, u'_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)^3}}, u'_z = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)^3}} \right]$
3. $u = x^{y^z}$ $\left[u'_x = y^z x^{y^z-1}, u'_y = x^{y^z} \ln x z y^{z-1}, u'_z = x^{y^z} \ln x y^z \ln y \right]$
4. $u = xe^{xyz}$ $\left[u'_x = e^{xyz}(1 + xyz), u'_y = x^2 z e^{xyz}, u'_z = x^2 y e^{xyz} \right]$
5. $u = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}}$ $\left[u'_x = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}} z}{2x}, u'_y = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}} \frac{z}{2y}, u'_z = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{z}{2}} \ln \frac{y}{x} \right]$
6. $u = e^{xy} \ln yz$ $\left[u'_x = e^{xy} y \ln yz, u'_y = e^{xy} \left(x \ln yz + \frac{1}{y}\right), u'_z = \frac{e^{xy}}{z} \right]$
7. $u = e^{xy} + e^{1+z}$ $\left[u'_x = e^{xy} y, u'_y = x e^{xy}, u'_z = e^{1+z} \right]$
8. $u = x \ln y + y \ln z + z \ln x$ $\left[u'_x = \ln y + \frac{z}{x}, u'_y = \frac{x}{y} + \ln z, u'_z = \frac{y}{z} + \ln x \right]$
9. $u = y^{\frac{z}{x}}$ $\left[u'_x = y^{\frac{z}{x}} \ln y \left(-\frac{z}{x^2}\right), u'_y = \frac{z}{x} y^{\frac{z}{x}-1}, u'_z = y^{\frac{z}{x}} \ln y \frac{1}{x} \right]$
10. $u = xyz e^{x+y}$ $\left[u'_x = e^{x+y} yz(1+x), u'_y = e^{x+y} xz(1+y), u'_z = xy e^{x+y} \right]$

11. $u = \arctan \frac{yz}{x^2}$ $\left[u'_x = -\frac{2xyz}{x^4+x^2z^2}, u'_y = \frac{zx^2}{x^4+y^2z^2}, u'_z = \frac{yx^2}{x^4+y^2z^2} \right]$
12. $f(p, q, r) = \ln \cot \frac{p}{q} + \ln r$ $\left[f'_p = -\frac{2}{\sin 2\frac{p}{q}}, f'_q = \frac{2p}{\sin 2\frac{p}{q} \cdot q^2}, f'_r = \frac{1}{r} \right]$
13. $f(p, q, r) = p^{qr}$ $\left[f'_p = qrp^{qr-1}, f'_q = rp^{qr} \ln p, f'_r = qp^{qr} \ln p \right]$
14. $f(p, q, r) = e^{3p} \cos \frac{q}{r}$ $\left[f'_p = 3e^{3p} \cos \frac{q}{r}, f'_q = -\frac{e^{3p}}{r} \sin \frac{q}{r}, f'_r = \frac{q}{r^2} e^{3p} \sin \frac{q}{r} \right]$
15. $f(p, q, r) = \ln \cos \frac{pq}{\sqrt{r}}$ $\left[f'_p = -\frac{q}{\sqrt{r}} \tan \frac{pq}{\sqrt{r}}, f'_q = -\frac{p}{\sqrt{r}} \tan \frac{pq}{\sqrt{r}}, \right.$
 $\left. f'_r = \frac{1}{2} \frac{pq}{\sqrt{r^3}} \tan \frac{pq}{\sqrt{r}} \right]$
16. $f(t, v, w) = \sqrt{\frac{tv}{w}}$ $\left[f'_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{tw}}, f'_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{vw}}, f'_w = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{tv}{w^3}} \right]$
17. $f(t, v, w) = e^{\frac{t}{v}} + e^{\frac{v}{w}}$ $\left[f'_t = \frac{e^{\frac{t}{v}}}{v}, f'_v = e^{\frac{t}{v}} \left(-\frac{t}{v^2}\right) + \frac{1}{w} e^{\frac{v}{w}}, f'_w = e^{\frac{v}{w}} \left(-\frac{v}{w^2}\right) \right]$
18. $f(t, v, w) = \sin t \sin v \sin w$ $\left[f'_t = \cos t \sin v \sin w, f'_v = \cos v \sin t \sin w, \right.$
 $\left. f'_w = \cos w \sin t \sin v \right]$
19. $f(t, v, w) = \ln(-t + 2v + 3w)$ $\left[f'_t = -\frac{1}{-t+2v+3w}, f'_v = \frac{2}{-t+2v+3w}, f'_w = \frac{3}{-t+2v+3w} \right]$
20. $f(t, v, w) = tve^{\frac{v}{w}}$ $\left[f'_t = ve^{\frac{v}{w}}, f'_v = te^{\frac{v}{w}} \left(1 + \frac{v}{w}\right), f'_w = -\frac{tv^2 e^{\frac{v}{w}}}{w^2} \right]$

Příklady: Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

1. $z = x^y$ $\left[z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, z''_{yy} = x^y \ln^2 x, z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \right]$
2. $z = x^2y + e^{xy^2}$ $\left[z''_{xx} = 2y + y^4 e^{xy^2}, z''_{yy} = 2xe^{xy^2} (1 + 2xy^2), \right.$
 $\left. z''_{xy} = 2(x + e^{xy^2} y^3 x + ye^{xy^2}) \right]$
3. $z = \frac{\cos x^2}{y}$ $\left[z''_{xx} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}, z''_{yy} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}, z''_{xy} = \frac{2x \sin x^2}{y^2} \right]$
4. $z = \frac{\cos^2 y}{x}$ $\left[z''_{xx} = \frac{2 \cos^2 y}{x^3}, z''_{yy} = \frac{-2 \cos 2y}{x}, z''_{xy} = \frac{\sin 2y}{x^2} \right]$
5. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ $\left[z''_{xx} = \frac{4y}{9x^{\frac{5}{3}}}, z''_{yy} = \frac{-x}{4\sqrt{y^3}}, z''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} \right]$
6. $z = y^{x+1}$ $\left[z''_{xx} = y^{x+1} \ln^2 y, z''_{xy} = y^x [1 + (x+1) \ln y], \right.$
 $\left. z''_{yy} = x(x+1)y^{x-1} \right]$

$$7. z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \left[z''_{xx} = \frac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, z''_{xy} = \frac{y(2x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, z''_{yy} = \frac{-x(x^2-2y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} \right]$$

$$8. z = x \sin(x+y) \quad \left[z''_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), z''_{xy} = \cos(x+y) - x \sin(x+y), z''_{yy} = -x \sin(x+y) \right]$$

$$9. z = \tan \frac{x^2}{y} \quad \left[z''_{xx} = \frac{2}{y \cos^2 \frac{x^2}{y}} + \frac{8x^2 \sin \frac{x^2}{y}}{y^2 \cos^3 \frac{x^2}{y}}, z''_{xy} = -2 \frac{x[2x^2 \sin \frac{x^2}{y} + y \cos \frac{x^2}{y}]}{y^3 \cos^3(\frac{x^2}{y})}, \right. \\ \left. z''_{yy} = 2 \frac{x^2[x^2 \sin \frac{x^2}{y} + y \cos \frac{x^2}{y}]}{y^4 \cos^3(\frac{x^2}{y})} \right]$$

$$10. z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad \left[z''_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$11. z = \arctan \frac{y}{x} \quad \left[z''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$12. u(x, y, z) = e^{x+2y+3z} \quad \left[u''_{xx} = e^{x+2y+3z}, u''_{yy} = 4e^{x+2y+3z}, u''_{zz} = 9e^{x+2y+3z}, \right. \\ \left. u''_{xy} = 2e^{x+2y+3z}, u''_{xz} = 3e^{x+2y+3z}, u''_{yz} = 6e^{x+2y+3z} \right]$$

$$13. u(x, y, z) = \frac{x+y}{x+z} \quad \left[u''_{xx} = -2 \frac{z-y}{(x+z)^3}, u''_{yy} = 0, u''_{zz} = 2 \frac{x+y}{(x+z)^3}, \right. \\ \left. u''_{xy} = -\frac{1}{(x+z)^2}, u''_{xz} = \frac{x-z+2y}{(x+z)^3}, u''_{yz} = -\frac{1}{(x+z)^2} \right]$$

$$14. u(x, y, z) = xye^{yz} \quad \left[u''_{xx} = 0, u''_{yy} = 0, u''_{zz} = xy^3e^{yz}, u''_{xy} = e^{yz}(1+yz), \right. \\ \left. u''_{xz} = y^2e^{yz}, u''_{yz} = e^{yz}xy(2+yz) \right]$$

$$15. u(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \quad \left[u''_{xx} = z(z-1) \frac{x^{z-2}}{y^z}, u''_{yy} = \frac{z(z+1)x^z}{y^{z+2}}, u''_{zz} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y}, \right. \\ \left. u''_{xy} = -\frac{z^2 x^{z-1}}{y^{z+1}}, u''_{xz} = \frac{x^{z-1}(1+z \ln x - z \ln y)}{y^z}, \right. \\ \left. u''_{yz} = -\frac{x^z(1+z \ln x - z \ln y)}{y^{z+1}} \right]$$

Příklady: Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí.

$$1. z = x^2 \sin^2 y, z'''_{xxy} = ? \quad \left[z'''_{xxy} = 2 \sin 2y \right]$$

$$2. z = e^x \ln y + \sin y \ln x, z'''_{xyy} = ?, z'''_{yyy} = ? \quad \left[z'''_{xyy} = -\frac{e^x}{y^2} - \frac{\sin y}{x}, z'''_{yyy} = \frac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x \right]$$

$$3. z = x^2 y + e^{xy^2}, z'''_{xxy} = ? \quad \left[z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2} y^3 (4 + 2xy^2) \right]$$

$$4. z = x \ln(xy), z'''_{xxy} = ? \quad \left[z'''_{xxy} = 0 \right]$$

5. $z = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$, spočítejte všechny parciální derivace 3. řádu
 $\left[z'''_{xxx} = -2 \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, z'''_{xxy} = 0, z'''_{yyx} = 0, z'''_{yyy} = 2 \frac{1-3y^2}{(y^2+1)^3} \right]$
6. $z = \cos(\sin y + x)$, $z'''_{xxx} = ?$, $z'''_{xxy} = ?$, $z'''_{yyy} = ?$
 $\left[z'''_{xxx} = \sin(\sin y + x), z'''_{xxy} = \sin(\sin y + x) \cos y, z'''_{yyy} \sin(\sin y + x)(\cos^3 y + \cos y) + 3 \sin y \cos y \cos(\sin y + x) \right]$
7. $z = e^{2y} \sin x$, $z'''_{yyx} = ?$ $\left[z'''_{yyx} = 4e^{2y} \cos x \right]$
8. $z = x \sin(x+y) + y \cos(x+y)$, $z'''_{xxy} = ?$ $\left[z'''_{xxy} = (y-2) \sin(x+y) - (1+x) \cos(x+y) \right]$
9. $z = y^{\ln x}$, $z'''_{xxx} = ?$, $z'''_{xyy} = ?$ $\left[z'''_{xxx} = \frac{(\ln y - 2)(\ln y - 1) \ln y y^{\ln x}}{x^3}, \right.$
 $\left. z'''_{xyy} = \frac{y^{\ln x - 2}}{x} [(\ln x - 1)(\ln x \ln y + 1) + \ln x] \right]$
10. $u(x, y, z) = \cos(xyz)$, $u'''_{xyz} = ?$ $\left[u'''_{xyz} = x^2 y^2 z^2 \sin(xyz) - 3xyz \cos(xyz) - \sin(xyz) \right]$

Příklady: Dokažte, že daná funkce vyhovuje dané diferenciální rovnici.

1. $z = \ln(e^x + e^y)$, $z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$
2. $z = \arctan(2x - y)$, $z''_{xx} + 2z''_{xy} = 0$
3. $z = 2 \cos^2(x - \frac{y}{2})$, $2z''_{yy} + z''_{xy} = 0$
4. $z = \frac{x}{\sqrt{x+y}} - y\sqrt{x+y}$, $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$
5. $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$, $z''_{xx} = a^2 z''_{yy}$
6. $z = e^{\frac{x}{y}}$, $yz''_{xy} = z'_y - z'_x$
7. $z = \frac{x^2 y^2}{x+y}$, $xz''_{xx} + yz''_{xy} = 2z'_x$
8. $z = xe^{-\frac{y}{x}}$, $xz''_{xy} + 2(z'_x + z'_y) = yz''_{yy}$
9. $u = xe^y + ye^x$, $u'''_{xxx} + u'''_{yyy} = xu'''_{xyy} + yu'''_{xxy}$
10. $u = \ln \frac{x^2 - y^2}{xy}$, $u'''_{xxx} + u'''_{xxy} - u'''_{xyy} - u'''_{yyy} = 2(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3})$

3.3 Tečná rovina a normála plochy, gradient, derivace ve směru, totální diferenciál

Příklady: Pro zadané funkce určete a) tečnou rovinu v bodě T

b) normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$

c) gradient v bodě A

d) dz v bodě A

e) d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$

f) derivaci ve směru \vec{s} v bodě A

1. $z = \sin x \cos y$, $T = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, ?]$, $A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\vec{s} (4, 3)$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } x - y - 2z + 1 = 0 & \text{d) } \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy \\ \text{b) } x = \frac{\pi}{4} + 4, y = \frac{\pi}{4} - t, z = \frac{1}{2} - 2t & \text{e) } -\frac{1}{2}dx^2 - dx dy - \frac{1}{2}dy^2 \\ \text{c) } \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} & \text{f) } \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

2. $z = y \ln x$, $T = [1, 1, ?]$, $A = [1, 1]$, \vec{s} je směr osy 1. a 3. kvadrantu

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } x - z - 1 = 0 & \text{d) } dx \\ \text{b) } x = 1 + t, y = 1, z = -t & \text{e) } -dx^2 + 2dx dy \\ \text{c) } \vec{i} & \text{f) } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right]$$

3. $z = x \sin^2 y$, $T = [1, \frac{\pi}{2}, ?]$, $A = [1, \frac{\pi}{2}]$, $\vec{s} (-3, -4)$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } x - z = 0 & \text{d) } dx \\ \text{b) } z = 1 + t, y = \frac{\pi}{2}, z = 1 - t & \text{e) } -2dy^2 \\ \text{c) } \vec{i} & \text{f) } -\frac{3}{5} \end{array} \right]$$

4. $z = e^{xy}$, $T = [1, 2, ?]$, $A = [1, 2]$, $\vec{s} (1, 2)$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } 2e^2x + e^2y - z - 3e^2 = 0 & \text{d) } 2e^2dx + e^2dy \\ \text{b) } x = 1 + 2e^2t, y = 2 + e^2t, z = e^2 - t & \text{e) } 4e^2dx^2 + 6e^2dx dy + e^2dy^2 \\ \text{c) } 2e^2\vec{i} + e^2\vec{j} & \text{f) } 2e^2 \end{array} \right]$$

$$5. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5, T = [1, 1, ?], A = [1, 1], \vec{s} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } 3x - 18y + z + 7 = 0 & \text{d) } -3dx + 18dy \\ \text{b) } x = 1 - 3t, y = 1 + 18t, z = 8 - t & \text{e) } 6d^2x - 12dxdy + 48d^2y \\ \text{c) } -3\vec{i} + 18\vec{j} & \text{f) } -\frac{51}{\sqrt{10}} \end{array} \right]$$

$$6. z = x \ln(x^2 + y), T = [1, 0, ?], A = [1, 0], \vec{s} = \vec{CD}, C = [2, 3], D = [3, 2]$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } 2x + y - z - 2 = 0 & \text{d) } 2dx + dy \\ \text{b) } x = 1 + 2t, y = t, z = -t & \text{e) } 2d^2x - 2dxdy - d^2y \\ \text{c) } 2\vec{i} + \vec{j} & \text{f) } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right]$$

$$7. z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2), T = [2, 2, ?], A = [2, 2], \vec{s}(-1, 1)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } 4y + z - 4 = 0 & \text{d) } -4dy \\ \text{b) } x = 2, y = 2 + 4t, z = -4 + t & \text{e) } 6d^2x - 16dxdy + 8d^2y \\ \text{c) } -4\vec{j} & \text{f) } -2\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Příklady: U zadaných funkcí určete a) tečnou rovinu v bodě T

b) normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$

c) gradient v bodě A

d) derivaci ve směru \vec{s} v bodě A

$$8. z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, T = [3, 4, ?], A = [3, 4], \vec{s}(3, 4)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } 17x + 11y + 5z - 60 = 0 & \text{c) } -\frac{17}{5}\vec{i} - \frac{11}{5}\vec{j} \\ \text{b) } x = 3 + 17t, y = 4 + 11t, z = -7 + 5t & \text{d) } -\frac{19}{5} \end{array} \right]$$

$$9. z = \sin \frac{x}{y}, T = [\pi, 1, ?], A = [\pi], 1 \vec{s}(1, 1)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } x - \pi y + z = 0 & \text{c) } -\vec{i} + \pi \vec{j} \\ \text{b) } x = \pi - t, y = 1 + \pi t, z = -t & \text{d) } \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \pi) \end{array} \right]$$

$$10. z = \frac{1}{xy}, T = [1, 1, ?], A = [1, 1], \vec{s}(1, 1)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a) } x + y + z - 3 = 0 & \text{c) } -\vec{i} - \vec{j} \\ \text{b) } x = 1 - t, y = 1 - t, z = 1 - t & \text{d) } -\sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$11. z = 3x^2 + 5y^2, T = [1, -1, ?], A = [1, -1], \vec{s}(\cos \alpha, \cos \beta), \alpha = \beta = 45^\circ$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a)} 6x - 10y - z - 8 = 0 & \text{c)} 6 \vec{i} - 10 \vec{j} \\ \text{b)} x = 1 + 6t, y = -1 - 10t, z = 8 - t & \text{d)} -2\sqrt{2} \end{array} \right]$$

12. $z = \arctan \frac{y}{x}$, $T = [1, 1, ?]$, $A = [1, 1]$, $\vec{s} = (1, 1)$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z - \frac{\pi}{4} = 0 & \text{c)} -\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \\ \text{b)} x = 1 + \frac{1}{2}t, y = 1 - \frac{1}{2}t, z = \frac{\pi}{4} + t & \text{d)} 0 \end{array} \right]$$

13. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $T = [1, 0, ?]$, $A = [1, 0]$, $\vec{s} = (2, 1)$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a)} 2x - z - 2 + 0 & \text{c)} 2 \vec{i} \\ \text{b)} 1 + 2t, y = 0, z = -t & \text{d)} \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right]$$

14. $z = xy^2 - x^2y$, $T = [2, 1, ?]$, $A = [2, 1]$, $\vec{s} = [B, C]$, $B = [1, -3]$, $C = [2, 1]$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a)} 3x + z - 4 = 0 & \text{c)} -3 \vec{i} \\ \text{b)} x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t & \text{d)} -\frac{3}{\sqrt{17}} \end{array} \right]$$

15. $z = \frac{y^2}{x^2}$, $T = [-1, 2, ?]$, $A = [-1, 2]$, $\vec{s} = (5, -2)$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{a)} 8x - 4y + z + 12 = 0 & \text{c)} 8dx + 4dy \\ \text{b)} x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t & \text{d)} \frac{32}{\sqrt{29}} \end{array} \right]$$

16. Určete tečnou rovinu plochy $z = \arctan \frac{y}{x}$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : x - y + 2z - 1 = 0$.
 $[x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0]$

17. Nalezně body, v nichž velikost gradientu funkce $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ je rovna 2.

$$\left[\text{body ležící na kružnici } x^2 + y^2 = \frac{2}{3} \right]$$

18. Určete derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1, 2]$

$$\begin{array}{ll} \text{a) ve směru tečného vektoru v bodě } A \text{ ke křivce } y = 2\sqrt{x} & \left[\frac{3\sqrt{2}}{5} \right] \\ \text{b) ve směru, v němž je derivace maximální.} & \left[\frac{2\sqrt{5}}{5} \right] \end{array}$$

19. Napište rovnici tečné roviny k ploše $z = 4 - x^2 - y^2$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : 2x + 2y + z = 0$.
 $[2x + 2y + z - 6 = 0]$

20. Napište rovnici tečné roviny k ploše $az = x^2 + y^2$, ($a \neq 0$) v bodech, v nichž přímka $x = y = z$ plochu protíná.
 $[x + y - z - \frac{a}{2} = 0, z = 0]$

21. Dokažte, že funkce $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ vyhovuje rovnici $u = 2 \ln 2 - \ln |\text{grad } u|^2$.
22. Najděte tečnou rovinu procházející bodem $A[0, 0, -1]$ a rovnoběžnou s přímkou p :
 $x = 4 + 2t, y = 2 + t, z = 4 + 2t$ k funkci $x^2 - y^2 - 3z = 0$. $[4x - 2y - 3z - 3 = 0]$
23. Najděte délku úsečky na přímce $x = 2, y = 3, z = t$ mezi plochou $z = x^2 + y^2$ a její tečnou rovinou v bodě $T[1, 1, 2]$. $[5]$
24. Určete objem čtyřstěnu, který je tvořen souřadnými rovinami a tečnou rovinou plochy $xyz = a^3$ v obecném bodě $T[x_0, y_0, z_0]$. $[\frac{9}{2}x_0y_0z_0]$
25. Určete součet velikostí úseků, které vytíná na souřadných osách tečná rovina plochy $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ v libovolném bodě $A[x_0, y_0, z_0]$. $[\text{součet je konstanta } a]$

3.4 Taylorův polynom

Příklady: Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě A .

- $z = \sin x \sin y$ $A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], n = 3$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 \right]$$
- $z = e^x \sin y$ $A = [0, 0], n = 3$

$$\left[y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 \right]$$
- $z = \sin(xy)$ $A = [0, \frac{\pi}{2}], n = 2$

$$\left[\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2}) \right]$$
- $z = \frac{\cos x}{\cos y}$ $A = [0, 0], n = 2$

$$\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right]$$
- $z = \ln(1 + x + y)$ $A = [0, 0], n = 3$

$$\left[x + y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \right]$$

6. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$ $A = [0, 0], n = 3$
 $\left[xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2\right]$
7. $z = 3x^2y + \sin^2 x + 5y - 2$ $A = [0, 0], n = 3$
 $\left[-2 + 5y + x^2 + 3x^2y\right]$
8. $z = y \ln x$ $A = [1, 1], n = 2$
 $\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)(y-1)\right]$
9. $z = \frac{y^2}{x^2}$ $A = [-1, 2], n = 2$
 $\left[4 + 8(x+1) + 4(y-2) + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2\right]$
10. $z = x \sin^2 y$ $A = [1, \frac{\pi}{2}], n = 2$
 $\left[1 + (x-1) - (y - \frac{\pi}{2})^2\right]$
11. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1$ $A = [1, 2], n = 2$
 $\left[-2 - y + 3(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) + (y-2)^2\right]$
12. $z = x^3 + y^3 - 2xy$ $A = [1, 1], n = 3$
 $\left[x - 2 + y + 3(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3\right]$
13. $z = \cos(x - y^2)$ $A = [0, 0], n = 3$
 $\left[1 - \frac{x^2}{2}\right]$
14. $z = \frac{1}{1-x-y+xy}$ $A = [0, 0], n = 2$
 $\left[1 + x + y + x^2 + y^2 + xy\right]$
15. $z = x^y$ $A = [1, 1], n = 3$
 $\left[x + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)\right]$
16. $z = e^{x+y+1}$ $A = [0, 0], n = 3$
 $\left[e + ex + ey + \frac{ex^2}{2} + exy + \frac{ey^2}{2} + \frac{ex^3}{6} + \frac{ex^2y}{2} + \frac{exy^2}{2} + \frac{ey^3}{6}\right]$
17. $z = e^y \sin x$ $A = [\frac{\pi}{2}, 0], n = 2$
 $\left[1 + y - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]$

18. $z = \ln x \ln(1 + y)$ $A = [1, 1], n = 3$
 $\left[\ln 2(x - 1) - \frac{\ln 2}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1) + \frac{1}{3} \ln 2(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^2(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)(y - 1)^2 \right]$
19. $z = \ln(x + 2y)$ $A = [1, 0], n = 3$
 $\left[x - 1 + 2y - \frac{(x-1)^2}{2} - 2(x - 1)y - 2y^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2y + \frac{8}{3}y^3 \right]$
20. $z = \frac{\cos y}{e^x}$ $A = [0, \frac{\pi}{4}], n = 3$
 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x(y - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x(y - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(y - \frac{\pi}{4})^3 \right]$

3.5 Lokální, vázané a absolutní extrémy

3.5.1 Stacionární body

Příklady: Určete stacionární body daných funkcí $z = f(x, y)$.

1. $z = (5x + 7y - 25)e^{-x^2+y}$ $\left[S = \left[-\frac{5}{14}, \frac{277}{98} \right] \right]$
2. $z = x - 2y + 3 \arctan \frac{y}{x}$ $\left[S_1 = [0, 0] \text{ nevyhovuje } D(f), S_2 = \left[\frac{6}{5}, \frac{3}{5} \right] \right]$
3. $z = 2x + y + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[S_1 = [0, 0] \text{ nevyhovuje } D(f), S_2 = \left[-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right] \right]$
4. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ $\left[S = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right] \right]$
5. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ $\left[S = \left[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} \right], k \in \mathbf{Z} \right]$

3.5.2 Lokální extrémy

Příklady: Určete lokální extrémy daných funkcí.

1. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ $\left[\left[\frac{1}{2}, -1 \right], \text{ lokální minimum} \right]$
2. $z = x^2 - y^2 + 2x - 2y$ $\left[\text{stacionární bod } [-1, -1], \text{ není extrém} \right]$
3. $z = x^3 - 3xy + y^3$ $\left[[1, 1] \text{ je lokální minimum, } [0, 0] \text{ je stac. bod} \right]$

4. $z = (x - y + 1)^2$ [v bodech přímky $y = x + 1$ jsou neostrá lok. min.]
5. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ $[-1, -2]$ je stac. bod, $[-\frac{5}{3}, 0]$ je lok. max.]
6. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ $[-1, 2]$ je stac. bod, $[0, 0]$ je lok. min.]
7. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$ je stac. bod, $[0, 0]$ je lok. min.]
8. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $[5, 2]$ je lokální minimum]
9. $z = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$, $x, y > 0$ $[\frac{5}{2}, \frac{4}{5}]$ je lokální minimum]
10. $z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$ $[1, 1]$ je lok. min., $[-1, -1]$ lok. max.,
 $[\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}], [-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}]$ jsou stac. body]
11. $z = \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$ $[3, 6]$ je lokální maximum]
12. $z = x^3 + 3y^2x - 15x - 12y$ $[2, 1]$ je lok. min., $[-2, -1]$ je lok. max.,
 $[1, 2], [-1, -2]$ jsou stacionární body]
13. $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$ $[0, 0]$ lok. min., $[0, 1], [0, -1]$ lok. max.,
 $[1, 0], [-1, 0]$ jsou stacionární body]
14. $z = xy \ln(x^2 + y^2)$ $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}], [-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ lok. min.,
 $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}], [\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ lok. max.,
 $[1, 0], [-1, 0]$ jsou stacionární body]
15. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ $[-4, 1]$ je lokální minimum]
16. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ $[0, 0]$ je lok. min. a $[-\frac{5}{3}, 0], [1, 4], [1, -4]$ jsou
další stacionární body]
17. $z = y^3 + 3xy^2 + 2x^3 + 9x^2$ $[-3, 0]$ lok. max., stac. body: $[-1, 2]$ a $[0, 0]$,
o bodu $[0, 0]$ nelze rozhodnout]

18. $z = (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}(1 - y^2)^{\frac{2}{3}}$ $\left[[0, 0] \text{ je lok. max.}, \text{ v bodech přímek } x = 1, x = -1, y = -1, y = 1 \text{ jsou neostrá lokální minima} \right]$
19. $z = x^2y^2(1 - x - y)$ $\left[\left[\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right] \text{ je lok. max.}, \text{ v bodech } [0, y], y > 1 \text{ a } [x, 0], x > 1 \text{ jsou neostrá lok. minima.}, \text{ v bodech } [0, y], y < 1 \text{ a } [x, 0], x < 1 \text{ jsou neostrá lok. maxima} \right]$
20. $z = x^3 + xy^2 - 2xy - 8x$ $\left[[\sqrt{3}, 1] \text{ lok. min.}, [-\sqrt{3}, 1] \text{ je lok. max.}, [0, 4], [0, -2] \text{ jsou další stacionární body} \right]$
21. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ $\left[[1, 4] \text{ je lokální minimum} \right]$
22. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ $\left[\left[1, \frac{1}{2} \right] \text{ je lok. min.}, [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
23. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ $\left[[-1, 1] \text{ je lokální minimum} \right]$
24. $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ $\left[\left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right] \text{ je lok. min.}, [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
25. $z = x^3y^2 + 3x^2y + \frac{1}{2}y^2 + 3y$ $\left[\text{stacionární body: } [0, -3], [-2, 1], [1, -2], \text{ u bodu } [1, -2] \text{ nelze o extrému rozhodnout} \right]$
26. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ $\left[[-4, -2] \text{ je lok. max.}, [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
27. $z = x \ln(x^2 + y)$ $\left[[0, 1] \text{ je stacionární bod} \right]$
28. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ $\left[\left[1, \frac{1}{2} \right] \text{ lok. min.}, [0, 0] \text{ je stacionární bod} \right]$
29. $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctan \frac{y}{x}$ $\left[[1, 1] \text{ je stacionární bod} \right]$
30. $z = (2 + x)^{\frac{2}{5}}(2 - y)^{\frac{2}{5}}$ $\left[\text{v bodech přímek } x = -2, y = 2 \text{ jsou neostrá lokální minima} \right]$
31. $z = 1 - \sqrt[5]{(x - 2)^4} - \sqrt[5]{y^4}$ $\left[[2, 0] \text{ je lokální minimum} \right]$

32. $z = \sqrt[3]{(x+1)^2} \sqrt[3]{(1-y)^2}$ [v bodech přímek $x = -1$, $y = 1$ jsou neostrá lokální minima]
33. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ $[[4, 4]$ je lokální maximum]
34. $z = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$ $[[-2, 4]$ je lokální maximum]
35. $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$ $[[7, -3]$ je lokální minimum]
36. $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$ $[[1, -2]$ je stacionární bod]
37. $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 4$ $[[\frac{1}{2}, 1]$ je lok. min., $[0, 0]$ je stacionární bod]
38. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$ $[[\sqrt{3}, -3]$ je lok. min., $[-\sqrt{3}, -3]$ je lok. max., další stacionární body jsou $[0, 0]$, $[0, -6]$]
39. $z = 3 + (x^2 + y)e^y$ $[[0, -1]$ je lokální minimum]
40. $z = xe^{-(x^2+y^2)}$ $[[-1, 0]$ je lokální minimum]

3.5.3 Vázané extrémny

1. $z = x^3 + y^3$, za podmínky $x + y - 3 = 0$ $[[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ lok. min.]
2. $z = x + 2y$, za podmínky $x^2 + y^2 = 5$ $[[1, 2]$ lok. max., $[-1, -2]$ lok. min.]
3. $z = 2(x^2 + y^2)$, za podmínky $x + y - 1 = 0$ $[[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ lok. min.]
4. $z = 6 - 4x - 3y$, za podmínky $x^2 + y^2 = 1$ $[[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ lok. min., $[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$ lok. max.]
5. $z = xy$, za podmínky $x + y = 1$ $[[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ lok. max.]
6. $z = 2(x^2 + y^2)$, za podmínky $x + y = 2$ $[[1, 1]$ lok. min.]
7. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, za podmínky $x + y = 2$ $[[1, 1]$ lok. min.]
8. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, za podmínky $x - y = \frac{\pi}{4}$ $[[\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}]$, lok. max. pro k sudé, lok. min. pro k liché]

9. $z = xy(4 - x - y)$, za podmínky $x + y = 1$ $\left[\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ lok. max.}\right]$
10. $z = x + y$, za podmínky $xy = 1$ $\left[\left[1, 1\right] \text{ lok. max.}, \left[-1, -1\right] \text{ lok. min.}\right]$
11. $z = e^y(2x + y)$, za podmínky $x - y - 3 = 0$ $\left[\left[0, -3\right] \text{ lok. min.}\right]$
12. $z = 2e^y x^2$, za podmínky $x = 3 + y$ $\left[\left[-2, -5\right] \text{ lok. max.}, \left[0, -3\right] \text{ lok. min.}\right]$
13. $z = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y$, za podmínky $x^2 + 4y^2 = 0$ $\left[\left[0, 0\right], \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right], \left[\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right] \text{ lok. min.}\right]$
14. $z = 2(x^2 + y^2) - x^2 y^2$, za podmínky $x + y + 2 = 0$ $\left[x_1 = -1 \text{ lok. min.}, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3} \text{ lok. max.}\right]$
15. $z = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, za podmínky $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ $\left[\left[2, 2\right] \text{ lok. min.}\right]$

3.5.4 Absolutní extrém

1. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ na čtverci $x \in \langle 0, 4 \rangle$, $y \in \langle 0, 4 \rangle$
 $\left[\left[3, 3\right] \text{ abs. min.}, \left[4, 0\right], \left[0, 4\right] \text{ abs. max.}\right]$
2. $z = 3xy$ v kruhu $x^2 + y^2 \leq 2$
 $\left[\left[-1, 1\right], \left[1, -1\right] \text{ abs. min.}, \left[1, 1\right], \left[-1, -1\right] \text{ abs. max.}\right]$
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$
 $\left[\left[1, 0\right] \text{ abs. min.}, \left[1, 2\right] \text{ abs. max.}\right]$
4. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$
 $\left[\left[3, -4\right] \text{ abs. min.}, \left[-3, 4\right] \text{ abs. max.}\right]$
5. $z = x^2 - y^2$ v uzavřené oblasti $x^2 + y^2 \leq 4$
 $\left[\left[2, 0\right], \left[-2, 0\right] \text{ abs. max.}, \left[0, 2\right], \left[0, -2\right] \text{ abs. min.}\right]$
6. $z = x^2 + y^2 - 2y + 1$ na $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0\}$
 $\left[\left[0, 1\right] \text{ abs. min.}, \left[0, -2\right] \text{ abs. max.}\right]$

7. $z = x^2 - xy + y^2$ na $M: |x| + |y| \leq 1$
 $[[0, 0] \text{ abs. min.}, [0, 1], [0, -1], [1, 0], [-1, 0], \text{abs. max.}]$
8. $z = xy^2(4 - x - y)$ na oblasti omezené přímkami $x = 0, y = 0, x + y = 6$
 $[[2, 4] \text{ abs. min.}, [1, 2] \text{ abs. max.}]$
9. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
 $[[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}] \text{ abs. max.}]$
10. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ na oblasti vymezené přímkami $x = 0, y = 0, x + y - 2 = 0$
 $[[0, 0] \text{ abs. min.}, [2, 0], [0, 2] \text{ abs. max.}]$
11. $z = xy(4 - x - y)$ na trojúhelníku omezeném přímkami $x = 1, y = 0, x + y = 6$
 $[[3, 3] \text{ abs. min.}, [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}] \text{ abs. max.}]$
12. $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 2$ v uzavřené oblasti omezené křivkami $y = 4, y = x^2$
 $[[- 2, 4] \text{ abs. min.}, [2, 4] \text{ abs. max.}]$
13. $z = x^2 - xy - y^2$ na čtverci tvořeném body $[1, 0], [0, 1], [-1, 0], [0, -1]$
 $[[0, -1], [0, 1] \text{ abs. min.}, [-1, 0], [1, 0] \text{ abs. max.}]$
14. $z = \arctan(2x^2 + y^2)$ na $y^2 - 1 \leq x \leq 1$
 $[[0, 0] \text{ abs. min.}, [1, \sqrt{2}], [1, -\sqrt{2}] \text{ abs. max.}]$
15. $z = 4 - (x - 2)^2 - (y + 3)^2$ na oblasti omezené křivkami $y = 0, x = 1, y = \sqrt{x}$
 $[[1, 1] \text{ abs. min.}, [1, 0] \text{ abs. max.}]$

3.5.5 Slovní příklady

- Rozložte číslo $a > 0$ na tři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl co největší.
 $[\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$
- V rovině (x, y) najděte takový bod, že součet čtverců jeho vzdáleností od přímek $x = 0, y = 0, x + 2y - 16 = 0$ je minimální.
 $[\frac{8}{5}, \frac{16}{5}]$

3. Do trojosého elipsoidu s poloosami a , b , c vepište kvádr maximálního objemu tak, aby jeho hrany byly rovnoběžné s osami elipsoidu. $\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}} \right]$
4. Určete rozměry pravoúhlého rovnoběžnostěnu tak, aby jeho objem byl maximální. Součet hran je roven $12d$. $\left[\text{krychle} \right]$
5. Určete rozměr betonové nádrže tvaru čtyřbokého hranolu tak, aby spotřeba betonu byla minimální pro daný objem V nádrže. Tloušťku stěn neuvažujte. $\left[\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} \right]$
6. Z plechového plátu 12 cm širokého se má zhotovit žlábek o průřezu rovnoramenného lichoběžníka. Jak velkou část z šířky x je nutno ohnout a jaký úhel φ mají svírat tyto stěny s podstavou, aby byl průřez maximální. $\left[\varphi = 60^\circ, x = 4 \right]$
7. Do polokoule vepište pravoúhlý rovnoběžnostěn maximálního objemu. Poloměr $r = 1$. $\left[1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
8. Bodem $A = [a, b, c]$ ved'te rovinu tak, aby se souřadnými rovinami tvořila čtyřstěn s minimálním objemem. Určete její rovnici. $\left[\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1 \right]$
9. Rozložte kladné číslo a na součin čtyř kladných čísel tak, aby jejich součet byl maximální. $\left[\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a} \right]$
10. V rovině $\rho : x + 2y - z + 3 = 0$ určete bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $[1, 1, 1]$, $[2, 2, 2]$ je nejmenší. $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right]$
11. Určete rozměry válce s maximálním objemem, je-li jeho povrch S roven 6 dm^2 . $\left[r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right]$
12. Na křivce $x + 2y + 3 = 0$ určete bod, který je nejbližší počátku. $\left[\left[-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5} \right] \right]$
13. Pro jaké rozměry má odkrytá vana tvaru poloviny válce s povrchem $S = 27$ maximální objem? $\left[r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}, v = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \right]$

14. Mezi všemi trojúhelníky s obvodem l najděte ten, který má největší obsah.

[rovnostranný]

Návod: $l = 2s = a + b + c$, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

15. Na parabole $y^2 = 4x$ najděte bod, který je nejbližší přímce $x - y + 4 = 0$. [1, 2]

3.6 Funkce dané implicitně

Příklady: Určete první a druhé parciální derivace v bodě A funkce $y = f(x)$, která je dána implicitně rovnicí.

$$1. \quad x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0 \quad A = [0, 1], \left[0, -\frac{2}{3}\right]$$

$$2. \quad xy + y^3 - 2x^2 = 0 \quad A = [1, 1], \left[\frac{3}{4}, -\frac{7}{32}\right]$$

$$3. \quad e^{x-y} - y + x^2 - 1 = 0 \quad A = [1, 1], \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right]$$

$$4. \quad \cos(xy) - y = 0 \quad A = [0, 1], [0, -1]$$

$$5. \quad ye^{xy} = c \quad A = [1, 1], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right]$$

Příklady: Určete první derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

$$6. \quad \cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz) \quad \left[z'_x = \frac{a}{c}, z'_y = \frac{b}{c}\right]$$

$$7. \quad \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} \quad \left[z'_x = \frac{z}{(x+z)}, z'_y = \frac{z^2}{y(x+z)}\right]$$

$$8. \quad z = \sqrt{x^2 - y^2} \tan \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \left[z'_x = \frac{xz}{(x^2 - y^2)}, z'_y = \frac{-yz}{(x^2 - y^2)}\right]$$

$$9. \quad x + y + z = e^{-(x+y+z)} \quad \left[z'_x = -1, z'_y = -1\right]$$

$$10. \quad x + y + z = e^z \quad \left[z'_x = \frac{1}{(x+y+z-1)} = z'_y\right]$$

Příklady: Vypočtěte parciální derivace prvního řádu v bodě A funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

11. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$ $A = [0, 1, 1], [z'_x = 1, z'_y = 1]$
12. $x^3 + y^3 + z^3 - z - 1 = 0$ $A = [1, 0, 1], [z'_x = \frac{3}{2}, z'_y = 0]$
13. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0$ $A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}], [z'_x(A) = -1, z'_y(A) = 0]$
14. $e^z + x^2y + z + 5 = 0$ $A = [1, -6, 0], [z'_x(A) = 6, z'_y(A) = -\frac{1}{2}]$
15. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$ $A = [0, 0, a], [z'_x(A) = -1, z'_y(A) = -\cos a]$

Příklady: Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

16. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$ $\left[z''_{xx} = \frac{-(z+1)^2 - (2-x)^2}{(z+1)^3}, z''_{yy} = \frac{2(z+1)^2 - 4y^2}{(z+1)^3}, \right.$
 $\left. z''_{xy} = \frac{-(2-x)2y^3}{z+1} \right]$
17. $3xyz - z^3 + 1 = 0$ $\left[z''_{xx} = \frac{2y^3xz}{(xy-z^2)^3}, z''_{yy} = \frac{2x^3yz}{(xy-z^2)^3}, \right.$
 $\left. z''_{xy} = \frac{2z^3xy - z^5 + x^2y^2z}{(xy-z^2)^3} \right]$
18. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ $\left[z''_{xx} = \frac{(1-z)^2 + x^2}{(1-z)^3}, z''_{yy} = \frac{(1-z)^2 + y^2}{(1-z)^3}, \right.$
 $\left. z''_{xy} = \frac{xy}{(1-z)^3} \right]$
19. $xyz = e^z$ $\left[z''_{xx} = \frac{-z^3 + 2z^2 - 2z}{x^2(z-1)^3}, z''_{yy} = \frac{-z^3 + 2z^2 - 2z}{y^2(z-1)^3}, \right.$
 $\left. z''_{xy} = -\frac{z}{xy(z-1)^3} \right]$
20. $e^{2z} + z \sin x - \cos y + 5 = 0, z''_{xy} = ?$ $\left[z''_{xy} = -\frac{\sin y \cos x}{(2e^{2z} + \sin x)^3} (-2e^{2z} - \sin x + 4ze^{2z}) \right]$

Příklady: Vypočtěte parciální derivace druhého řádu v bodě A funkce $z = f(x, y)$, která je daná implicitně danou rovnicí.

21. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$ $A = [0, 1, 1], [z''_{xx} = -1, z''_{yy} = \frac{1}{2}, z''_{xy} = -\frac{1}{2}]$
22. $x^3 + y^3 + z^3 - z - 1 = 0$ $A = [1, 0, 1], [z''_{xx} = -\frac{39}{4}, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = 0]$
23. $e^z - xyz + x^2 - 2 = 0$ $A = [1, 2, 0], [z''_{xx} = -2, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = -2]$
24. $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$ $A = [0, 0, 1], [z''_{xx} = 1, z''_{yy} = -\sin 2,$
 $z''_{xy} = -\sin 1]$

$$25. z^3 - 3xyz - a^3 = 0 \quad A = [0, 1, a], \left[z''_{xx} = 0, z''_{yy} = 0, z''_{xy} = \frac{1}{a} \right]$$

Příklady: Určete rovnici tečny a normály v bodě A funkce $y = f(x)$ dané implicitní rovnicí.

$$26. x^2 + 9y^2 - 13 = 0 \quad A = [2, -1], \left[t : 9y - 2x + 13 = 0, n : 2y + 9x - 16 = 0 \right]$$

$$27. \cos(xy) - x - 2y = 0 \quad A = [1, 0], \left[t : 2y + x - 1 = 0, n : y - 2x + 2 = 0 \right]$$

$$28. e^y - \sin x = \frac{1}{2} \quad A = [?, 0], x_A \in \langle 0, \pi \rangle \\ \left[t : y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}), n : y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{6}) \right]$$

$$29. \ln y + 3e^x = 0 \quad A = [0, ?], \left[t : y - \frac{1}{e^3} = -\frac{3}{e^3}x, n : y - \frac{1}{e^3} = \frac{e^3}{3}x \right]$$

$$30. xy - \ln y - \frac{1}{x} + 2 = 0 \quad A = [e^{-1}, e^2], \left[t : y - e^2 = -\frac{2e^4}{e-1}(x - \frac{1}{e}), \right. \\ \left. n : y - e^2 = \frac{e-1}{2e^4}(x - \frac{1}{e}) \right]$$

Příklady: Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě A plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně danou rovnicí.

$$31. x^2 - y^2 + z^2 - 6 = 0, A = [1, 2, -3] \quad \left[x - 2y - 3z - 6 = 0, x = 1 + t, \right. \\ \left. y = 2 - 2t, z = -3 - 3t \right]$$

$$32. 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, \quad \left[5x + 4y + z - 28 = 0, x = 2 + 5t, \right. \\ A = [2, 3, 6] \quad \left. y = 3 + 4t, z = 6 + t \right]$$

$$33. x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, ?] \quad \left[2x - 6y + 3z - 49 = 0, x = 2 + 2t, \right. \\ \left. y = -6 - 6t, z = 3 + 3t; 2x - 6y - 3z - 49 = 0, x = 2 + 2t, y = -6 - 6t, z = -3 - 3t \right]$$

$$34. (z^2 - x^2)xyz - y^5, A = [1, 1, 2] \quad \left[2x + y + 11z - 25 = 0, x = 1 + 2t, \right. \\ \left. y = 1 + t, z = 2 + 11t \right]$$

$$35. z - y - \ln \frac{x}{z} = 0, A = [1, 1, 1] \quad \left[x + y - 2z = 0, x = 1 + t, \right. \\ \left. y = 1 + t, z = 1 - 2t \right]$$

$$36. x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, A = [-1, ?, 1] \quad \left[5x + 11y + z - 18 = 0, x = -1 + 5t, \right. \\ \left. y = 2 + 11t, z = 1 + t \right]$$

$$37. e^z - z + xy = 3, A = [2, 1, ?] \quad \left[\begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0, x = 2 + t, \\ y = 1 + 2t, z = 0 \end{array} \right]$$

$$38. 8 = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}}, A = [2, ?, 1] \quad \left[\begin{array}{l} x + y - 4z = 0, x = 2 + t, \\ y = 2 + t, z = 1 - 4t \end{array} \right]$$

$$39. e^{xz} + yz = 0, A = [0, -1, 1] \quad \left[\begin{array}{l} x + y - z + 2 = 0, x = t, \\ y = -1 + t, z = 1 - t \end{array} \right]$$

$$40. x \cos z + \arctan \frac{y}{z} = 0, A = [0, ?, 1] \quad \left[x \cos 1 + y = 0, x = t \cos 1, y = t, z = 1 \right]$$

Příklady: Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ určené implicitně danou rovnicí, která je rovnoběžná s rovinou ρ . V dotykovém bodě určete rovnici normály.

$$41. 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21 = 0, \rho : 6x + 4y + z = 0 \\ \left[\begin{array}{l} 6x + 4y + z - 21 = 0; 6x + 4y + z + 21 = 0; x = 2 + 6t, y = 2 + 4t, z = 1 + t; \\ x = -2 + 6t, y = -2 + 4t, z = -1 + t \end{array} \right]$$

$$42. x(y + z) + z^2 = 1, \rho : 3x - 2y + 6z = 2 \\ \left[\begin{array}{l} 3x - 2y + 6z - \sqrt{40} = 0; 3x - 2y + 6z + \sqrt{40} = 0; x = -\frac{2}{\sqrt{10}} + 3t, y = -\frac{1}{\sqrt{10}} - 2t, \\ z = \frac{4}{\sqrt{10}} + 6t; x = \frac{2}{\sqrt{10}} + 3t, y = \frac{1}{\sqrt{10}} - 2t, z = -\frac{4}{\sqrt{10}} + 6t \end{array} \right]$$

$$43. x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0, \rho : x + y - z = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x + y - z - 9 = 0; x + y - z + 9 = 0; x = 4 + t, y = 1 + t, z = -4 - t; \\ x = -4 + t, y = -1 + t, z = 4 - t \end{array} \right]$$

$$44. z - \arctan \frac{y}{x} = 0, \rho : x - y + 2z - 1 = 0 \\ \left[x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0; x = 1 + t, y = 1 - t, z = \frac{\pi}{4} + 2t \right]$$

$$45. x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, \rho : x + 4y + 6z = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x + 4y + 6z - 21 = 0; x + 4y + 6z + 21 = 0; x = 1 + t, y = 2 + 4t, z = 2 + 6t; \\ x = -1 + t, y = -2 + 4t, z = -2 + 6t \end{array} \right]$$

46. $16x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 88$, $\rho : 8x + 9y + 6z = 0$
 $[8x + 9y + 6z - 44 = 0; 8x + 9y + 6z + 44 = 0; x = 1 + 8t, y = 2 + 9t, z = 3 + 6t;$
 $x = -1 + 8t, y = -2 + 9t, z = -3 + 6t]$
47. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 88$, $\rho : 6x + 9y + 8z - 82 = 0$
 $[6x + 9y + 8z - 44 = 0; 6x + 9y + 8z + 44 = 0; x = 3 + 6t, y = 2 + 9t, z = 1 + 8t;$
 $x = -3 + 6t, y = -2 + 9t, z = -1 + 8t]$
48. Nalezněte tečnou rovinu ke grafu funkce dané implicitní rovnicí $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$, která je kolmá k rovinám $2x - 2y - z = 3$, $x - y - z = 0$.
 $[x + y - 3 = 0; x + y + 1 = 0]$
49. Na ploše dané implicitně rovnicí $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ určete body, v nichž jsou tečné roviny rovnoběžné se souřadnými rovinami.
 $[[0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}], [2, -4, 2], [-2, 4, -2], [4, -2, 0], [-4, 2, 0]]$
50. Určete tečnou rovinu grafu funkce $e^z - z + xy = 3$ kolmou k přímkce $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1$.
 $[x + 2y - 4 = 0, x + 2y + 4 = 0]$

Příklady: Určete stacionární body funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí.

51. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 72$ $[[1, 1], [-1, -1]]$
52. $x^2 - 2xy + z^2 - 4x + 4z = 5$ $[[0, -2]]$
53. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 8 = 0$ $[[-1, 1]]$
54. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z = 0$ $[[2, -3]]$
55. $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y + 2z + 16 = 0$ $[[2, -3]]$

Příklady: Nalezněte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí.

56. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ $[-\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x dx + \sin 2y dy)]$

57. $e^z - xyz = 0$ $\left[\frac{z}{x(z-1)} dx + \frac{z}{y(z-1)} dy \right]$
58. $\ln(xyz) + z^2y = 0$ $\left[-\frac{z}{x(1+2z^2y)} dx - \frac{z(1+z^2y)}{y(1+2z^2y)} dy \right]$
59. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ $\left[-\frac{x}{3z} dx - \frac{2y}{3z} dy \right]$
60. $\arcsin \frac{z}{x} + 3y^2 = 0, x > 0$ $\left[\frac{z}{x} dx - 6y\sqrt{x^2 - z^2} dy \right]$

3.7 Parametrizace křivek

Příklady: Najděte obecnou rovnici křivky dané parametricky.

1. $x = t^2 - 2t + 3, y = t^2 - 2t + 1, t \in (1, \infty)$ $[y = x - 2]$
2. $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, t \in \mathbf{R}$ $[x^2 + y^2 = a^2]$
3. $x = t^2 + t + 1, y = t^2 - t + 1$ $[(x - y)^2 - 2x - 2y + 4 = 0]$
4. $x = 4 + 4t^2, y = 3 + 4t$ $[(y - 3)^2 = 4(x - 4)]$
5. $x = \frac{a}{\cos t}, y = b \tan t$ $\left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right]$

Příklady: Najděte parametrické rovnice křivky, která je průnikem dvou daných ploch.

6. $z = xy, y = \ln x$ $[x = t, y = \ln t, z = t \ln t, t > 0]$
7. $y^2 = x, z^2 = y$ $[x = t^4, y = t^2, z = t, t \in \mathbf{R}]$
8. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $\left[x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin t, \right.$
 $\left. z = \frac{r}{\sqrt{2}}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right]$
9. $x^2 + y^2 = r^2, z = x^2 - y^2$ $\left[x = r \cos t, y = r \sin t, \right.$
 $\left. z = r^2 \cos 2t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right]$
10. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = b^2, x > 0$ $\left[x = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 t}, y = b \cos t \right.$
 $\left. z = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \right]$

3.8 Tečna a normálová rovina prostorové křivky

Vzorce:

$$k : x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\text{směrový vektor tečny } \vec{t} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\text{normálová rovina } \rho \equiv (T, \vec{n}_\rho = \vec{t})$$

Příklady: Najděte tečnu a obecnou rovnici normálové roviny prostorové křivky.

1. $k : t^4 + t^2 + 1, y = 4t^3 + 5t + 2, z = t^4 - t$ v bodě $T = [3, -7, 2]$
 $[t : x = 3 - 6t, y = -7 + 17t, z = 2 - 5t; \rho : 6x - 17y + 5z - 147 = 0]$
2. $k : x = t^3 - t^2 - 5, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3 - 16$ v bodě T pro $t_0 = 2$
 $[t : x = -1 + 2t, y = 13 + 3t, z = 6t; \rho : 2x + 3y + 6z - 37 = 0]$
3. $k : t^2 - t, y = t^3, z = 3t^4 - 2t^2$ v bodě T pro $t_0 = 1$
 $[t : x = t, y = 1 + 3t, z = 1 + 10t; \rho : x + 3y + 10z - 13 = 0]$
4. k je proniková křivka ploch $z = x^2 + y^2$ a $x = y$ v bodě $T = [1, 1, 2]$
 $[t : x = 1 + t, y = 1 + t, z = 2 + 4t; \rho : x + y + 4z - 10 = 0]$
5. $k : x^2 + y^2 + z^2 = 25, x + z = 5, T = [2, 2\sqrt{3}, 3]$
 $[t : x = 2 + t, y = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}t, z = 3 - t; \rho : x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y - z = 0]$

Kapitola 4

Diferenciální rovnice

Příklady: Zjistěte, zda daná funkce je řešením dané diferenciální rovnice.

1. $y = \sin x$, $y \cos x - \sin xy' = 0$ [ano]

2. $y = x^2 + x + 2$, $y'' + 3x = 0$ [ne]

3. $y = x \cos x$, $y'' + 2y' - y = 3x$ [ne]

4. $y = y = 3 - \sin^2 x$, $y'' + 2y' = -4 \cos 2x$ [ne]

5. $y = 2e^x - e^{-x}$, $y'' - y' = -\frac{2}{e^x}$ [ano]

4.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Příklady: Nalezněte obecné, případně partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1. $2y' \sqrt{x} = y$ [$y = ce^{\sqrt{x}}$]

2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ [$y^2 = c|x^2 - 1| - 1$]

3. $y' \sqrt{1 - x^2} - y^2 - 1 = 0$ [$\arctan y = \arcsin x + c$]

4. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, $y(e) = 1$ [$y = (x \ln x - x + 1)^2$]

5. $x + xy + y'(y + xy) = 0$ $[e^{x+y} = c|(y+1)(x+1)|]$
6. $y' = (2y + 1) \cot x, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ $[y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}]$
7. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ $[y^3 = 3x(1-x) + c]$
8. $y' = 10^{x+y}$ $[10^x + 10^{-y} = c]$
9. $y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ $[\arcsin y + \arcsin x = c]$
10. $e^{-s}(1 + \frac{ds}{dt}) = 1$ $[(1 - e^{-s})c = e^t]$
11. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}$ $[\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x]$
12. $xy' + y = 0$ $[xy = c]$
13. $y' = y \cos x$ $[y = ce^{\sin x}]$
14. $\frac{1}{2y+1} dy - \cot x dx = 0, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ $[y = \frac{4 \sin^2 x - 1}{2}]$
15. $xy^2 y' + y = xy' - x^3 y$ $[\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \ln c |\frac{y}{x}|]$
16. $x(1 + y^2) dx - y(1 + x^2) dy = 0, y(-2) = 1$ $[y^2 = \frac{2}{5} x^2 - \frac{3}{5}]$
17. $y' = \frac{x+2}{x^3-2x^2}$ $[y = \frac{1}{x} + \ln c \frac{|x-2|}{|x|}]$
18. $(y-1)(y-2) - y' = 0$ $[y-2 = ce^x(y-1)]$
19. $y - y^2 + xy' = 0$ $[y = \frac{1}{1-cx}]$
20. $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$ $[ce^{\frac{x^2}{2}+x} = \frac{y}{y+1}]$
21. $y' - y^2 \ln x = 0$ $[y = -\frac{1}{x \ln x - x} + c]$
22. $y' + 2 \cos x \sin^2 y = 0$ $[\cot y = 2 \sin x + c]$
23. $y' \sin x - y \cos x = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$ $[y = c \sin x, y_0 = \sin x]$
24. $e^y(1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0$ $[y = \ln |c(1 + x^2) - 1|]$

25. $y' \cot x + y = 2, y(\pi) = -1$ $[y_0 = 2 - 3 \cos x]$
26. $y' e^{x^2} - 2x = 0$, partikulární řešení jdoucí
bodem $[0, -1]$ $[y = -e^{-x^2}]$
27. $\sin xy' - y \ln y = 0$ $[\ln y = c \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}}]$
28. $e^{x+y} - y' = 0$ $[e^x + e^{-y} = c]$
29. $y \ln y + xy' = 0, y(1) = 1$ $[x \ln y = c, y = 1]$
30. $xy' + y = y^2, y(1) = \frac{1}{2}$ $[\frac{y-1}{y} = xc, 1 = y(x+1)]$
31. $(x+1)y' = 1 - y, y(0) = 5$ $[y = \frac{5+x}{x+1}]$
32. $e^{x-y} dx - e^{y-x} dy = 0$ $[e^{2y} - e^{2x} = c]$
33. $y - xy' = 1 + x^2 y', y(1) = 1$ $[y = 1]$
34. $e^{x+y}(1 - e^{-y}) + (1 + e^x)^2 y' = 0$ $[y - \ln |e^y - 1| = c - \frac{1}{1+e^x}]$
35. $x^2 \sqrt{1+y^2} + y^2 \sqrt{1+x^2} y' = 0$ $[y \sqrt{1+y^2} + x \sqrt{1+x^2} = \ln(|y + \sqrt{1+y^2}| |x + \sqrt{1+x^2}|) + c]$
36. $2(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 0$ $[y^2 = \ln |1 + e^x| - \ln 2]$
37. $y' + y \cos x = \cos x$ $[y = 1 + ke^{-\sin x}]$
38. $\cos^2 xy' = (1 + \cos^2 x) \sqrt{1 - y^2}$ $[y = \arcsin(\tan x + x + c) \wedge y = 1 \wedge y = -1]$
39. $y' = \tan x \tan y, y(0) = \frac{\pi}{2}$ $[\sin y = \frac{1}{\cos x}]$
40. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ $[\arcsin y = x + c]$

4.2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Příklady: Nalezněte obecné, případně partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1. $y' \tan x - y = a$ $[y = c \sin x - a]$
2. $y' + 2y = 4x$ $[y = ce^{-2x} + 2x - 1]$
3. $y' + 2xy = e^{-x^2} x$ $[y = e^{-x^2} (c + \frac{x^2}{2})]$
4. $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$ $[y = \frac{c}{\cos x} + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2}]$
5. $y' = 2xy - x^3 + x$ $[y = ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2]$
6. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ $[y = (1 + x^2)(c + x)]$
7. $y' + y = \cos x$ $[y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)]$
8. $y' + ay = e^{mx}$ $[y = ce^{-ax} + \frac{1}{m+a}e^{mx}]$
9. $xy' + y - e^x = 0$ $[y = \frac{1}{x}(c + e^x)]$
10. $xy' + y = 1 + \ln x$ $[y = \frac{c}{x} + \ln x]$
11. $2xy' - 6y = x^2$ $[y = cx^3 - \frac{1}{2}x^2]$
12. $y' \cos x + y \sin x = 1$ $[y = c \cos x + \sin x]$
13. $xy' \ln x - 2y = \ln x$ $[y = c \ln^2 x - \ln x]$
14. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ $[y = cx + \frac{x^3}{2}]$
15. $y' + y = 4x$ $[y = ce^{-x} + 4x - 4]$
16. $y' + \frac{y}{1+x} = e^x, x \neq -1$ $[y = \frac{xe^x+c}{1+x}]$
17. $y' - y \tan x = \cot x$ $[y = \frac{\ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + c}{\cos x}]$
18. $(2x + 1)y' + y = x$ $[y = \frac{x-1}{3} + \frac{c}{\sqrt{2x+1}}]$

19. $y' + y \cos x = \sin 2x$ $\left[y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x} \right]$
20. $y' - y \tan x = 2 \cos^2 x$ $\left[y = 2 \tan x - \frac{2}{3} \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{c}{\cos x} \right]$
21. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, y(\sqrt{2}) = \sqrt{e}$ $\left[y = x^2 \left[1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) e^{\frac{1}{x}} \right] \right]$
22. $y' + \sqrt{x} y = 3x^2, y(1) = -\frac{3}{2}$ $\left[y = 3\sqrt{x^3} - \frac{9}{2} \right]$
23. $x^2 y' = 2xy^{-3}, y(-1) = 1$ $\left[y = 2x^2 + \frac{1}{x} \right]$
24. $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\left[y = \sin x (e^x - e^{\frac{\pi}{2}}) \right]$
25. $y' + \frac{y}{1+x} = \sin x, y(0) = 0, x \neq -1$ $\left[y = -\cos x + \frac{\sin x}{1+x} + \frac{2}{1+x} \right]$
26. $y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^2, y(0) = 1$ $\left[y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{1}{2}(x+1)^2 \right]$
27. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}, y(0) = 4$ $\left[y = (x^2 + 4)e^{x^2} \right]$
28. $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 1, x \neq -1$ $\left[y = \frac{x}{x+1} (1 + x + \ln x) \right]$
29. $y' + y \cot x = \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\left[y = \frac{2x - \sin 2x + 4 - \pi}{4 \sin x} \right]$
30. $xy' + 2y = 2x \cos 2x + 2 \sin 2x, y(\pi) = 1$ $\left[y = \sin 2x + \frac{\pi^2}{x^2} \right]$

4.3 Exaktní diferenciální rovnice

1. $x dx + y dy = 0, y(0) = 1$ $\left[x^2 + y^2 = 1 \right]$
2. $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$ $\left[y = xc \right]$
3. $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$ $\left[x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c \right]$
4. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ $\left[x^2 - y^2 = cy^3 \right]$
5. $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$ $\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + c = 0 \right]$
6. $\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$ $\left[\arctan \frac{x}{y} = c \right]$

7. $\frac{x}{x^2+y^2} dy + (1 - \frac{y}{x^2+y^2}) dx = 0$ $[x - \arctan \frac{x}{y} = c]$
8. $(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0, y(0) = 1$ $[\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y - \frac{8}{3} = 0]$
9. $3x^2y dx + (x^3 + y^2) dy = 0$ $[x^3y + \frac{y^3}{3} = c]$
10. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0, y(0) = 0$ $[xe^y - y^2 = 0]$
11. $(x + xy^2) dx + (y + x^2y) dy = 0$ $[x^2 + x^2y^2 + y^2 = c]$
12. $(4x^3y^3 - 2xy) dx + (3x^4y^2 - x^2) dy = 0$ $[x^4y^3 - x^2y = c]$
13. $(3e^{3x}y - 2) dx + e^{3x} dy = 0, y(0) = e$ $[ye^{3x} - x^2 + e = 0]$
14. $(\cos y + y \cos x) dx + (\sin x - x \sin y) dy = 0$ $[x \cos y + y \sin x = c]$
15. $\cos y \cos x dx + (\frac{1}{y} - \sin x \sin y) dy = 0,$
partikulární řešení jdoucí bodem $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $[\sin x \cos y + \ln y - \ln \frac{\pi}{2} = 0]$
16. $(\frac{y}{x} + 2x)dx + \ln x dy = 0$ $[y \ln x + x^2 + c = 0]$
17. $(\sin^2 y + e^x) dx + x \sin 2y dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{2}$ $[x \sin^2 y + e^x - 1 = 0]$
18. $e^{xy}y dx + e^{xy}x dy = 0, y(0) = 0$ $[e^{xy} - 1 = 0]$
19. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y) dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x) dy = 0$ $[\sqrt{x^2 + y^2} - xy + c = 0]$
20. $(-\frac{y}{x^2+y^2} + 6x) dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 0, y(1) = 1$ $[\arctan \frac{y}{x} + 3x^2 - \frac{\pi}{4} - 3 = 0]$

4.4 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, homogenní

Příklady: Najděte obecné nebo partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1. $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -1$ $[y = -\frac{1}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x}]$

2. $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} \right]$
3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ $\left[y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} \right]$
4. $y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$ $\left[y = \frac{2}{3} \sin 3x + \cos 3x \right]$
5. $y'' + y' = 0, y(1) = 2, y'(-1) = -2$ $\left[y = 2 - \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e} e^{-x} \right]$
6. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$ $\left[y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x \right]$
7. $y''' - 6y'' + 13y' = 0$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{3x} \sin 2x + c_3 e^{3x} \cos 2x \right]$
8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x \right]$
9. $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0,$
 $y(0) = 26, y'(0) = 54, y''(0) = 108$ $\left[y = 21e^{2x} + 8e^{3x} - 3e^{4x} \right]$
10. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$ $\left[y = c_1 + c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x + c_4 x \sin 2x + c_5 x \cos 2x \right]$
11. $y'' - 4y = 0$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \right]$
12. $y''' - 8y = 0$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x \right]$
13. $y''' - y' = 0, y(0) = 3,$
 $y'(0) = -1, y''(0) = 1$ $\left[y = 2 + e^{-x} \right]$
14. $y^{(4)} - y = 0$ $\left[c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x \right]$
15. $y^{(4)} + 4y = 0$ $\left[y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 e^{-x} \cos x + c_4 e^{-x} \sin x \right]$

4.5 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, nehomogenní

4.5.1 Metoda variace konstant

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$ $\left[y = (c_1 - \frac{1}{2}x) \cos 2x + (c_2 + \frac{1}{4} \ln |\sin 2x|) \sin 2x \right]$
2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x e^x \ln |x| \right]$
3. $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{-x} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x) e^{-x} \right]$
4. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ $\left[y = (c_1 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}) e^{-2x} + (c_2 + x \ln x - x) x e^{-2x} \right]$
5. $y'' + y = \tan x$ $\left[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \cos x \right]$
6. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ $\left[y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \frac{1}{2} x \sin 2x \right]$
7. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x+1}}$ $\left[y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + e^{-x-1}(x-1) \right]$
8. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$ $\left[y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2x}) e^{-2x} \right]$
9. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$ $\left[y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| \sin 3x \right]$
10. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ $\left[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x \right]$
11. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x+1}}$ $\left[y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) \right]$
12. $y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + e^{2x} \ln(1+e^{-x}) + e^x \ln(1+e^x) \right]$

13. $y'' - y = \frac{2}{e^x + 1}$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) - e^{-x} \ln(1 + e^x) - 1 \right]$
14. $y'' + 4y = \cot 2x$ $\left[y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\tan x| \sin 2x \right]$
15. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \ln \sqrt{x^2 + 1} + e^x x \arctan x \right]$
16. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ $\left[y = (\ln |\sin x| + k_1) \sin x + (k_2 - x) \cos x \right]$
17. $y'' - y = \cos^2 x$ $\left[\text{Návod: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \right.$
 $\left. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos 2x \right]$
18. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \ln x$ $\left[y = k_1 e^{-x} + k_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x} (2 \ln x - 3) \right]$
19. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \sqrt{1+x}$ $\left[y = \left(\frac{2}{5} (\sqrt{1+x})^5 - \frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 + c_1 \right) e^{-x} + \left(\frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 + c_2 \right) x e^{-x} \right]$
20. $y'' + y = \cot^2 x$ $\left[y = \left(\cos x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c_1 \right) \cos x + \left(c_2 - \sin x - \frac{1}{\sin x} \right) \sin x \right]$
21. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^x + 2}$ $\left[y = (\ln(e^x + 2) + c_1) e^{2x} + (e^x + 2 - 2 \ln(e^x + 2) + c_2) e^x \right]$
22. $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}$ $\left[y = 2\sqrt{1+e^x} - \frac{2}{3} (\sqrt{1+e^x})^3 + c_1 + 2e^x \sqrt{1+e^x} + c_2 e^x \right]$
23. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 2x}$ $\left[y = \left(-\frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right| + c_1 \right) \cos 2x + \left(c_2 - \frac{1}{\sin 2x} \right) \sin 2x \right]$
24. $y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}$ $\left[y = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c_1 \right) \cos x + \left(c_2 - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| \right) \sin x \right]$
25. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$ $\left[y = \left(\frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + c_1 \right) e^x + \left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c_2 \right) x e^x \right]$

4.5.2 Metoda neurčitých koeficientů - speciální pravá strana

Příklad: Lineární diferenciální rovnice má tyto kořeny charakteristické rovnice: -1 je trojnásobný kořen, $\pm 2i$, $3 \pm 4i$, 0 jsou dvojnásobné kořeny a $+3$ je jednonásobný. Navrhněte partikulární řešení pro dané pravé strany:

1. $3xe^{-x}$ $[y_0 = x^3(ax + b)e^{-x}]$
2. $2x \cos 3x$ $[y_0 = (ax + b) \sin 3x + (cx + d) \cos 3x]$
3. $2e^{-3x}$ $[y_0 = ae^{-3x}]$
4. $x^2e^{3x} \sin 4x$ $[y_0 = xe^{3x}((ax^2 + bx + c) \sin 4x + (dx^2 + ex + f) \cos 4x)]$
5. $10x^3$ $[y_0 = x^2(ax^3 + bx^2 + cx + d)]$
6. $x \sin x + 5x^2e^{3x}$ $[y_0 = y_{01} + y_{02}, y_{01} = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x, y_{02} = xe^{3x}(ax^2 + bx + c)]$
7. $x^2e^{2x \cos 3x}$ $[y_0 = e^{2x}((ax^2 + bx + c) \cos 3x + (dx^2 + ex + f) \sin 3x)]$
8. $5x^2 \sin 2x$ $[y_0 = x((ax^2 + bx + c) \sin 2x + (dx^2 + ex + f) \cos 2x)]$

Příklady : Najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice.

1. $y'' - 4y = 8x^3$ $[y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - 3x - 2x^3]$
2. $y'' + y = e^x \sin 2x$ $[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{10}e^x(2 \cos 2x + \sin 2x)]$
3. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ $[y = (c_1 + c_2x + \frac{3}{2}x^2)e^{2x}]$
4. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ $[y = c_1e^{2x} + c_2e^x + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x]$
5. $y^{(5)} - y^{(3)} = x^2 - 1$ $[y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3]$
6. $y'' + y = 4x \sin x$ $[y = (c_1 - x^2) \cos x + (c_2 + x) \sin x]$

7. $y'' + 4y' - 5y = 1$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{5} \right]$
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x} \right]$
9. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ $\left[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x} \right]$
10. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \left(\frac{1}{10} x - \frac{3}{25} \right) \cos x - \left(\frac{3}{10} x + \frac{17}{50} \right) \sin x \right]$
11. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x} \right]$
12. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$ $\left[y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + (2x - 2x^2 - 3) e^{2x} \right]$
13. $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}$ $\left[y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{12} e^{-2x} + \frac{1}{2} x + \frac{5}{4} \right]$
14. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$ $\left[y = c_1 e^{2x} \cos 2x + c_2 e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x \right]$
15. $y'' + y = \sin x + \cos 2x$ $\left[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x \right]$
16. $y'' - 4y = \sin x + 3x \cos x$ $\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \left(-\frac{3}{5} x + \frac{3}{25} \right) \cos x - \frac{3}{25} \sin x \right]$
17. $y'' + 4y' = x^3 + x + 2$ $\left[y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{16} x^4 - \frac{1}{16} x^3 + \frac{11}{64} x + \frac{53}{32} \right]$
18. $y'' - 2y' = e^x \sin x$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x \right]$
19. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$ $\left[y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{12} x^3 \cos 2x + \frac{1}{16} x^2 \sin 2x + \frac{1}{32} x \cos 2x \right]$
20. $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$ $\left[y = e^{3x}(c_1 + c_2 x) + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} x - 2e^x \right]$
21. $2y'' + 5y' = e^x$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{-\frac{2}{5}x} + \frac{1}{7} e^x \right]$
22. $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \frac{4}{5}x$ $\left[e^{\frac{3}{5}x} (c_1 \cos \frac{4}{5}x + c_2 \sin \frac{4}{5}x) - \frac{1}{8} x e^{\frac{3}{5}x} \cos \frac{4}{5}x \right]$
23. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{2x}$ $\left[y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} - \frac{1}{9} e^{2x} \right]$
24. $y^{IV} - 3y''' = x$ $\left[y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x} - \frac{1}{72} x^4 - \frac{1}{6} x \right]$
25. $y'' + 2y = 2x e^x$ $\left[y = c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x + e^x \left(\frac{2}{3} x - \frac{4}{9} \right) \right]$

4.5.3 Různé příklady

Příklady: Určete partikulární řešení dané diferenciální rovnice s danými počátečními podmínkami:

1. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -\frac{11}{2}$ $\left[y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x} \right]$
2. $y'' + 6y' + 9y = (2x+1)e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = \frac{1}{8}$ $\left[y = e^{-3x}(15x+5) + \frac{1}{8}xe^x \right]$
3. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ $\left[y = 4e^x + 2e^{3x} \right]$
4. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ $\left[y = e^{-\frac{1}{2}x}(x+2) \right]$
5. $y'' + 3y' + 2y = 20 \cos 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 6$ $\left[y = -\cos 2x + 3 \sin 2x \right]$
6. $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$ $\left[y = -6e^{-2x} \sin x - 3e^{-2x} \cos x \right]$
7. $y'' + 9y = 0$, $y(\pi) = -1$, $y'(\pi) = 1$ $\left[y = \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x = \right.$
 $\left. = -\cos 3(x-\pi) + \frac{1}{3} \sin 3(x-\pi) \right]$
8. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$ $\left[y = 3e^{-2x} \sin 5x \right]$
9. $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $\left[y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]$
10. $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ $\left[y = -\frac{1}{2}e^{x-\frac{\pi}{2}} \sin 2x \right]$
11. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ $\left[y = \frac{5}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x} \right]$
12. $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$ $\left[y = -3e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x) \right]$
13. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$, $s(0) = 1$, $s'(0) = 1$ $\left[s = e^{-t}(\cos t + 2 \sin t) \right]$
14. $y'' + 2ay' + a^2y = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = 0$ $\left[y = ae^{-ax}(1+ax) \right]$
15. $y'' + 9y = 15 \sin 2x$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 0$ $\left[y = 3 \sin 2x - 7 \cos 3x - \right.$
 $\left. -2 \sin 3x \right]$