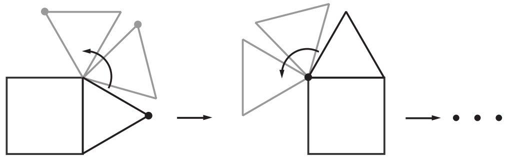
**19.** Rovnostranný trojúhelník se bez skluzu kotálí po čtverci se stranou délky 1. Určete délku křivky, po které se bude pohybovat vyznačený vrchol trojúhelníku, dokud se tento vrchol spolu s trojúhelníkem nedostanou opět do výchozí pozice.



(A) $4\pi$ (B) $\frac{28}{3}\pi$ (C) $8\pi$ (D) $\frac{14}{3}\pi$ (E) $\frac{21}{2}\pi$

**20.** Kolik permutací $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ čísel množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ má vlastnost, že součet $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ je dělitelný 3?

(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 24

**21.** Po hodině algebry na tabuli zůstal graf funkce $y = x^2$ a 2012 přímek rovnoběžných s přímkou $y = x$, každá z nich protínající parabolu ve dvou bodech. Najděte součet $x$-ových souřadnic průsečíků přímek a paraboly.

(A) 0 (B) 1 (C) 1006
(D) 2012 (E) Není možné určit.

**22.** Tři vrcholy krychle (neležící v jedné stěně) mají souřadnice $P = (3, 4, 1)$, $Q = (5, 2, 9)$ a $R = (1, 6, 5)$. Který z následujících bodů je středem této krychle?

(A) $A = (4, 3, 5)$ (B) $B = (2, 5, 3)$ (C) $C = (3, 4, 7)$ (D) $D = (3, 4, 5)$ (E) $E = (2, 3, 5)$

**23.** Posloupnost $1, 1, 0, 1, -1, \ldots$ splňuje následující podmínky: První dva členy $a_1$ a $a_2$ jsou rovny 1. Třetí člen je rozdílem předcházejících dvou členů, tj. $a_3 = a_1 - a_2$. Čtvrtý člen je součtem přecházejících dvou členů, tj. $a_4 = a_2 + a_3$. Dále $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$ a tak dále. Najděte součet prvních 100 členů takovéto posloupnosti.

(A) 0 (B) 3 (C) $-21$ (D) 100 (E) $-1$

**24.** Každá kočka v Třeskoprskách je buď moudrá nebo šílená. Jestliže se moudrá kočka ocitne v místnosti se třemi šílenými kočkami, potom zešílí. Jestliže se šílená kočka ocitne v jedné místnosti se třemi moudrými, potom je jimi odhalena jako šílená. Tři kočky vešly do prázdné místnosti. Brzy poté co vešla čtvrtá kočka, první odešla. Po příchodu páté kočky odešla druhá a tak dále. Poté, co vešla 2012. kočka se poprvé stalo, že některá kočka byla odhalena jako šílená. Které z následujících koček mohly být obě šílené při vstupu do místnosti?

(A) první a 2012. (B) druhá a 2010. (C) třetí a 2009.
(D) čtvrtá a 2012. (E) druhá a 2011.

# Matematický KLOKAN 2012

www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

## Úlohy za 3 body

**1.** Čemu je rovno číslo $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$?

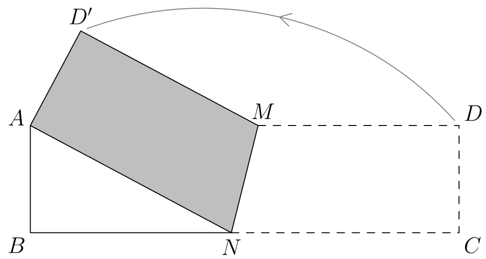
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[6]{4}$ (D) $\sqrt[3]{4}$ (E) 2

**2.** První zleva v řadě pěti čísel je 2, páté je číslo 12. Součin prvních tří čísel je 30, součin prostředních tří čísel je 90 a součin posledních tří čísel je 360. Které z následujících čísel stojí uprostřed řady?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | 12 |

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 10

**3.** Obdélníkový list papíru $ABCD$ o rozměrech $4\,\text{cm} \times 16\,\text{cm}$ byl přeložen podél úsečky $MN$ tak, že vrchol $C$ splynul s vrcholem $A$ (jako na obrázku). Určete obsah čtyřúhelníku $ANMD'$.




(A) $28\,\text{cm}^2$ (B) $30\,\text{cm}^2$ (C) $32\,\text{cm}^2$ (D) $48\,\text{cm}^2$ (E) $56\,\text{cm}^2$

**4.** Součet číslic devítimístného čísla je 8. Kolik je součin všech jeho číslic?

(A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) 9!

**5.** Najděte největší přirozené číslo $n$, pro něž platí $n^{200} < 5^{300}$.

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 11 (E) 12

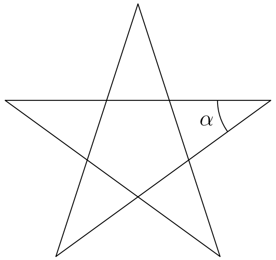
**6.** Která z následujících funkcí vyhovuje rovnici

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}?$$

(A) $f(x) = \frac{2}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \frac{1}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

**7.** Reálné číslo $x$ vyhovuje nerovnostem $x^3 < 64 < x^2$. Který z následujících výroků je pravdivý?

(A) $0 < x < 64$ (B) $-8 < x < 4$ (C) $x > 8$ (D) $-4 < x < 8$ (E) $x < -8$




**8.** Určete velikost úhlu $\alpha$ (na obrázku vpravo) pravidelné pěticípé hvězdy.

(A) 24° (B) 30° (C) 36° (D) 40° (E) 45°

## Úlohy za 4 body

**9.** Cestovní kancelář organizuje čtyři fakultativní výlety na Sicílii pro turistický zájezd. Každý výlet si objednalo 80 % turistů. Najděte nejmenší možné procento turistů, kteří si objednali všechny výlety.

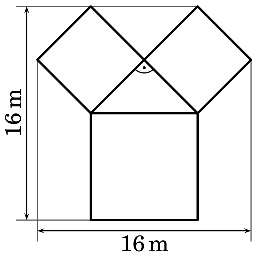
(A) 80 % (B) 60 % (C) 40 % (D) 20 % (E) 16 %

**10.** V škole se známkuje stupnicí od 1 do 5. Čtvrtletní písemka ve čtvrtém ročníku dopadla špatně. Průměrná známka byla 4. Průměrná známka chlapců byla 3,6, zatímco průměrná známka dívek byla 4,2. Které z následujících tvrzení o této třídě je pravdivé?

(A) Chlapců je dvakrát více než dívek. (B) Chlapců je čtyřikrát více než dívek.
(C) Dívek je dvakrát více než chlapců. (D) Dívek je čtyřikrát více než chlapců.
(E) Dívek je stejně jako chlapců.

**11.** Na obrázku je plán záhonu růží. Bílé růže rostou ve dvou shodných čtvercích, červené růže ve zbývajícím čtverci. Žluté růže rostou v pravoúhlém trojúhelníku. Celková šířka i celková výška růžového záhonu je 16 m. Určete jeho obsah.

(A) 114 m$^2$ (B) 130 m$^2$ (C) 144 m$^2$
(D) 160 m$^2$ (E) 186 m$^2$



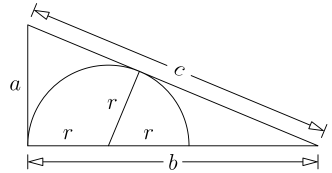

**12.** Všechna sedadla očíslovaná vzestupně od 1 v první řadě kina byla vyprodána. Navíc byl omylem ještě prodán další lístek do první řady. Součet čísel všech prodaných sedadel do první řady byl 857. Které sedadlo bylo prodáno dvakrát?

(A) 4 (B) 16 (C) 25 (D) 37 (E) 42



**13.** Je dán pravoúhlý trojúhelník se stranami délek $a$, $b$ a $c$. Najděte poloměr jemu „vepsané polokružnice“ na obrázku.

(A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ (B) $\frac{ab}{a+b+c}$ (C) $\frac{ab}{b+c}$ (D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ (E) $\frac{ab}{a+c}$

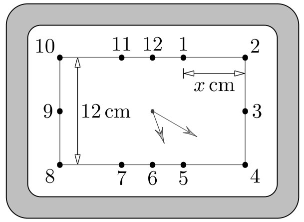



**14.** Čtverec $ABCD$ má strany délky 2. Body $E$ a $F$ jsou po řadě středy stran $AB$ a $AD$. Pro bod $G$ úsečky $CF$ platí $3|CG| = 2|GF|$. Určete obsah trojúhelníku $BEG$.

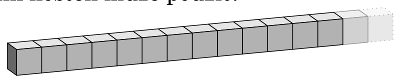
(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{6}{5}$

**15.** Hodiny na obrázku mají tvar obdélníku, přitom každá z ručiček se pohybuje konstantní úhlovou rychlostí stejně jako u běžných hodin. Vzdálenost mezi čísly 8 a 10 na ciferníku je 12 cm. Najděte vzdálenost mezi čísly 1 a 2.

(A) $3\sqrt{3}$ cm (B) $2\sqrt{3}$ cm (C) $4\sqrt{3}$ cm
(D) $2 + \sqrt{3}$ cm (E) $12 - 3\sqrt{3}$ cm




**16.** Klokan staví hranol ze standardních hracích kostek (součet bodů na protilehlých stěnách je 7) stejně jako na obrázku. Přitom slepuje pouze stěny, na kterých je týž počet bodů. Cílem klokana je sestrojit takový hranol, aby součet všech bodů na jeho povrchu byl 2012. Kolik kostek může použít?



(A) 70 (B) 71 (C) 142
(D) 143 (E) Kostky takto sestavit nelze.

## Úlohy za 5 bodů

**17.** Najděte nejmenší možnou velikost vnitřního úhlu rovnoramenného trojúhelníku s těžnicí, která tento trojúhelník dělí na dva rovnoramenné trojúhelníky.

(A) 15° (B) 22,5° (C) 30° (D) 36° (E) 45°

**18.** Se zlomky můžeme provádět následující dvě operace. Buď zvětšíme jeho čitatele o 8, nebo zvětšíme jeho jmenovatele o 7. Po $n$ takových operacích (v nějakém pořadí) jsme ze zlomku $\frac{7}{8}$ opět obdrželi zlomek se stejnou hodnotou. Najděte nejmenší možnou hodnotu přirozeného čísla $n$.

(A) 56 (B) 81 (C) 109
(D) 113 (E) Není možné obdržet zlomek se stejnou hodnotou.