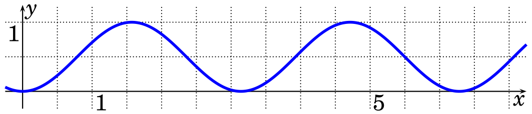
19. Na tabuli jsou napsána tři trojmístná čísla. K jejich zápisu jsou použity všechny číslice od 1 do 9. Které z následujících čísel *nemůže* být součtem tří na tabuli napsaných čísel?

(A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575

20. Na obrázku vidíte graf jedné z uvedených funkcí. Které?



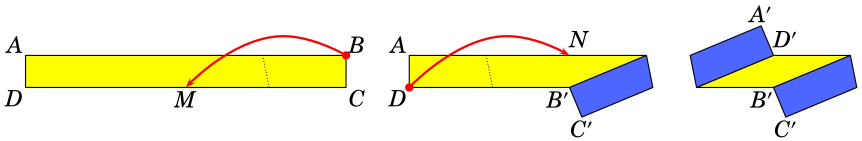
(A) $y = \sin 2x$ (B) $y = \dfrac{\cos 2x}{2}$ (C) $y = \dfrac{1 - \cos x}{2}$

(D) $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ (E) $y = \sin^2 x$

21. Anna sečetla všechna přirozená čísla od 1 do n a zjistila, že prvočíslo p, které dělí tento součet, není dělitelem žádného ze sčítanců. Které z následujících čísel může být součtem $n + p$?

(A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

22. Obdélníkový pruh papíru $ABCD$ na stole je 5 cm široký a 50 cm dlouhý. Jeho horní plocha je světlá a spodní tmavá. Kristýna přeložila tento pruh podle obrázku tak, že vrchol B umístila do středu M strany CD a vrchol D umístila do středu N strany AB. Vypočtěte obsah viditelné světlé části pruhu na obrázku vpravo.

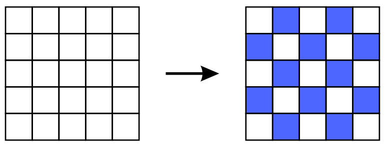


(A) $50\,\mathrm{cm}^2$ (B) $60\,\mathrm{cm}^2$ (C) $62{,}5\,\mathrm{cm}^2$ (D) $75\,\mathrm{cm}^2$ (E) $90\,\mathrm{cm}^2$

23. Přirozené číslo n má právě 6 kladných dělitelů (včetně 1 a n). Součin pěti z nich je 648. Který je jeho zbývající (šestý) dělitel?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24

24. Na počátku jsou všechna pole čtvercové tabulky 5×5 bílá. V jednom kroku vybereme tři sousední pole téže řady (řádku nebo sloupce) a zaměníme jejich barvy z bílé na tmavou a z tmavé na bílou. Určete nejmenší možný počet kroků, po kterých bude tabulka obarvená jako šachovnice na obrázku vpravo.



(A) méně než 10 (B) 10 (C) 12

(D) více než 12 (E) je to nemožné

Matematický KLOKAN 2016

www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

1. Kolik celých čísel je větších než $2015 \cdot 2017$ a současně menších než $2016 \cdot 2016$?

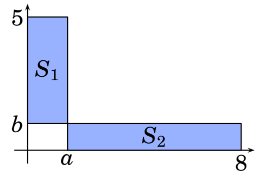
(A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017

2. Pro celá kladná čísla a, b, c, d platí $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Které z těchto čísel je největší?

(A) a (B) b (C) c

(D) d (E) nelze jednoznačně určit

3. V soustavě souřadnic na obrázku vidíte pravoúhelníky S_1 a S_2 se stejným obsahem a společným vrcholem. Určete hodnotu podílu $\frac{a}{b}$.

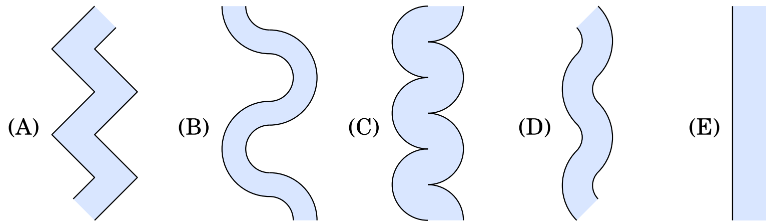


(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{7}{4}$ (E) $\frac{8}{5}$

4. Reálné číslo x vyhovuje rovnici $x^2 - 4x + 2 = 0$. Určete hodnotu $x + \frac{2}{x}$.

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

5. O úseku řeky je známo, že z každého bodu jejího břehu má nejkratší most přes řeku stejnou délku. Který z následujících obrázků *neznázorňuje* tento úsek?

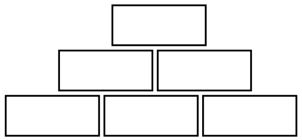


6. Úhlopříčka AC pravoúhelníku $ABCD$ má dvojnásobnou délku než jeho strana BC. Nechť M je bod strany CD takový, že $|AM| = |MC|$. Určete velikost úhlu CAM.

(A) 15° (B) 22,5° (C) 45°

(D) 60° (E) jiná hodnota

7. Číslo napsané v každém poli horní a prostřední řady obrázku vpravo je rovno součinu obou čísel v polích, která leží bezprostředně pod ním. Dolní řada obsahuje přirozená čísla větší než jedna. Které z následujících čísel *nemůže* být v horním poli?



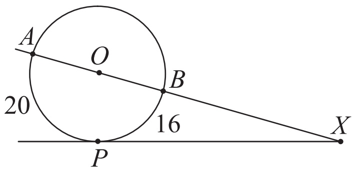
(A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

8. Je dáno $x_1 = 2$ a pro všechna přirozená čísla n dále platí $x_{n+1} = x_n^{x_n}$. Vypočtěte x_4.

(A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

Úlohy za 4 body

9. Nechť X je vnější bod kružnice, který leží na přímce AB, kde úsečka AB je průměrem kružnice. Tečna kružnice z bodu X se jí dotýká v bodě P. Délky oblouků AP a BP jsou po řadě 20 a 16. Určete velikost úhlu AXP.

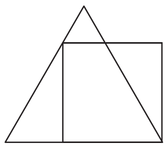


(A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°

10. Každá z rovnic $x^2 + ax + b = 0$ a $x^2 + bx + a = 0$ s reálnými parametry a a b ($a \neq b$) má dva reálné kořeny. Součet druhých mocnin kořenů první z nich je roven součtu druhých mocnin kořenů druhé rovnice. Určete hodnotu $a + b$.

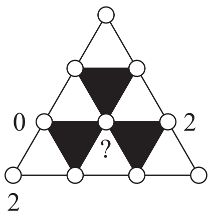
(A) −4 (B) −2 (C) 0
(D) 4 (E) nelze jednoznačně určit

11. Jeden vrchol čtverce o obvodu 4 splývá s vrcholem rovnostranného trojúhelníku a další dva leží na stranách tohoto trojúhelníku (viz obr.). Určete obvod trojúhelníku.



(A) $4 + \sqrt{3}$ (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) $3 + \sqrt{2}$ (D) 4 (E) 3

12. Každému z deseti vyznačených bodů na obrázku je přiřazeno jedno z čísel 0, 1, 2 (tři z přiřazených čísel jsou známa). Přitom součet všech čísel u vrcholů každého bílého trojúhelníku je dělitelný 3 a součet všech čísel u vrcholů každého černého trojúhelníku není dělitelný 3. Které číslo je přiřazeno společnému vrcholu tří černých trojúhelníků?



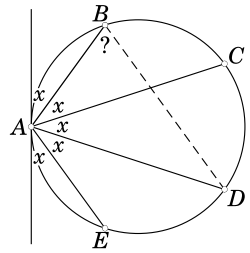
(A) jen 0 (B) jen 1 (C) jen 2
(D) buď 0, nebo 1 (E) buď 0, nebo 1, nebo 2

13. Kolik různých řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1?$$

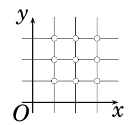
(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) nekonečně mnoho

14. Běta vyznačila na kružnici body A, B, C, D, E a v bodě A sestrojila tečnu k této kružnici. Všech pět úhlů s vrcholem A, na obrázku označených x, má stejnou velikost. Určete velikost úhlu ABD.



(A) 66° (B) 70,5° (C) 72° (D) 75° (E) 77,5°

15. Kolik kvadratických funkcí proměnné x má vlastnost, že jejich graf prochází alespoň třemi z vyznačených mřížových bodů kartézské soustavy souřadnic na obrázku?



(A) 6 (B) 18 (C) 19 (D) 22 (E) jiný počet

16. Uvnitř krychle je dán bod M. Krychle je rozřezána na 6 čtyřbokých jehlanů s vrcholem M, jejichž podstavy tvoří stěny krychle. Objemy pěti z těchto jehlanů jsou 2, 5, 10, 11 a 14. Určete objem šestého jehlanu.

(A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

Úlohy za 5 bodů

17. Na kouzelném ostrově žijí jen poctiví (mluví vždy pravdu) a lháři (vždy lžou). Cestovatel uviděl sedm ostrovanů sedět kolem ohně. Každý z nich řekl: „Sedím mezi dvěma lháři.“ Kolik lhářů sedí u ohně?

(A) 3 (B) 4 (C) 5
(D) 6 (E) nelze jednoznačně určit

18. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A se osy jeho vnitřních úhlů při přeponě protínají v bodě P, jehož vzdálenost od přepony je $\sqrt{8}$. Vypočtěte vzdálenost bodů A a P.

(A) 3 (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{12}$ (D) 4 (E) 8